



UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
SECCION DE PUBLICACIONES

TEORIA DE PLASTICIDAD

Conceptos Generales

CATEDRA DE ESTRUCTURAS

E. ALARCÓN

M. DOBLARÉ

INDICE

1.- INTRODUCCION Y ECUACIONES BASICAS DE LA ELASTICIDAD.....	1
1.1 .- Introducci3n.	
1.2 .- Breve reseña hist3rica.	
1.3 .- Ecuaciones de equilibrio en tensiones.	
1.4 .- Tensiones principales.	
1.5 .- Tensor esf3rico y desviador.	
1.6 .- Representaci3n geom3trica del tensor de tensiones.	
1.7 .- Estudio de la deformaci3n.	
1.8 .- Ecuaciones de compatibilidad.	
1.9 .- Ley de comportamiento.	
1.10.- Energia el3stica y energias el3sticas desviadora y esf3rica.	
2.- CRITERIOS DE PLASTIFICACION.....	56
2.1.- El ensayo de tracci3n.	
2.2 .- El cuerpo pl3stico ideal.	
2.3 .- El criterio de plastificaci3n. Consideraciones generales.	
2.4 .- Criterios de plastificaci3n.	
2.4.1.- Criterio de Rankine y Lam3 (1858 y 1852).	
2.4.2.- Criterio de Saint-Venant y Poncelet (1870 y 1839).	
2.4.3.- Criterio de Tresca-Guest (1868 y 1872).	
2.4.4.- Criterio de Beltrami y Haig (1903 y 1919).	
2.4.5.- Criterio de Von Mises-Hencky (1913).	
2.4.6.- Criterios dependientes de J_1 .	
2.5.- La evidencia experimental. Los ensayos de Lode.	
2.6.- Un criterio de plastificaci3n para materiales anis3tropos	

3.- RELACIONES TENSION-DEFORMACION PLASTICA..... 118

- 3.1 .- Introducción.
- 3.2 .- Postulados de Drucker. Definición de rigidización por deformación.
- 3.3 .- Derivación general de las relaciones tensión-deformación plástica.
- 3.4 .- Potencial plástico. Leyes de flujo asociadas y no asociadas.
- 3.5 .- Convexidad de la superficie de plastificación.
- 3.6 .- Ecuaciones de Levy-Mises y Prandtl-Reuss.
- 3.7 .- Verificación experimental de las ecuaciones de Prandtl-Reuss.
- 3.8 .- Ley de plastificación asociada al criterio de Tresca.
- 3.9 .- Ecuaciones tensión-deformación de Hencky.
- 3.10.- Relaciones deformación plástica-deformación total de Prandtl-Reuss.
- 3.11.- Ley de plastificación para materiales anisótropos.

4.- MODELOS BASICOS DE RIGIDIZACION.....162

- 4.1 .- Introducción.
- 4.2 .- Trabajo plástico. Dos medidas de la rigidización.
- 4.3 .- Formulación general.
- 4.4 .- El cuerpo con plasticidad lineal. El cuerpo plástico perfecto.
- 4.5 .- Rigidización isótropa.
- 4.6 .- Rigidización cinemática.
- 4.7 .- Carga cíclica. Comparación de los resultados predichos por los modelos de rigidización y los resultados experimentales.
- 4.8 .- Influencia de la temperatura.
- 4.9 .- Reblandecimiento por deformación.

5.- MODELOS COMPUESTOS DE RIGIDIZACION.....	201
5.1 .- Introducción.	
5.2 .- Modelo Cinemático-Isótropo	
5.3 .- El modelo de capas superpuestas.	
5.4 .- El campo de modulos plásticos.	
5.5 .- Un modelo simplificado con dos superficies.	
6.- ANALISIS LIMITE.....	222
6.1 .- Introducción.	
6.2 .- El teorema de las potencias virtuales.	
6.3 .- La superficie de carga. Superficie de colapso.	
6.4 .- Teoremas de acotación.	
6.4.1.- Teorema estático.	
6.4.2.- Teorema cinemático.	
6.5 .- El material elastoplástico perfecto.	
7.- REFERENCIAS.....	247

1.- INTRODUCCION Y ECUACIONES BASICAS DE LA ELASTICIDAD

1.1.- INTRODUCCION

La Teoría de Plasticidad es el nombre con que se designa a la disciplina de la Física que estudia el estado de un cuerpo deformado irreversiblemente, constituyendo la continuación de la bien establecida "Teoría de la Elasticidad".

La Teoría de Plasticidad tiene como punto de partida los resultados experimentales sobre el comportamiento macroscópico de materiales sometidos a deformación, principalmente metales, y como objetivos fundamentales de la Teoría: primero, proveer de una descripción de las relaciones tensión-deformación para un material que se encuentra en estado elastoplástico, que explique en la forma más aproximada posible los resultados experimentales, y segundo desarrollar técnicas de solución para la consecución de la distribución de tensiones en cuerpos permanentemente deformados.

En definitiva, el comportamiento plástico de un material está caracterizado por una deformación, en parte irreversible, independiente del tiempo, que comienza a plantearse sólo cuando se ha conseguido un cierto "nivel de tensión" determinado, nivel que puede variar con el estado de deformación inicial del material, de acuerdo con los resultados experimentales (efecto Bauschinger y endurecimiento por deformación).

De acuerdo con ello, en general, son necesarios cuatro requisitos para la formación de una teoría que modele la deformación elastoplástica. Estos son:

1).- Unas relaciones explícitas entre cargas, tensiones, deformaciones y movimientos que describan el comportamiento del material bajo condiciones elásticas, es decir antes del comienzo de la deformación plástica. Estas relaciones se plantearán en el presente capítulo.

2).- Un criterio de plastificación que defina los límites del comportamiento elástico, indicando el nivel de tensión a partir del cual comienza el flujo plástico. Algunos de estos criterios y su definición matemática se plantearán en el capítulo II.

3).- Una relación entre tensión y deformación después del comienzo del flujo plástico, es decir cuando las deformaciones tienen ambas componentes, elástica y plástica. Este será el objeto del capítulo III.

4).- Un criterio de endurecimiento por deformación que defina la variación de la tensión de límite elástico. Varios de estos criterios se verán en los capítulos IV y V.

Una vez establecida la Teoría se realizarán una serie de aplicaciones importantes a materiales especiales como son el suelo (capítulo VI) y hormigón (capítulo VII), para terminar con el estudio con de algunos métodos de resolución de problemas plásticos con ordenador (F.E.M y B.I.E.M) en los últimos capítulos.

Citaremos a continuación, muy brevemente, las hipótesis que se plantean en las teorías de plasticidad más comunes, y que se tendrán en cuenta a partir de ahora, siempre que específicamente no se indique lo contrario.

a).- Isotropía del material.- Las propiedades de éste no varían con la dirección.

b).- Incompresibilidad debido a las deformaciones plásticas.- No hay cambio de volumen como consecuencia de las deformaciones plásticas.

c).- Las deformaciones elásticas son pequeñas comparadas con las deformaciones plásticas.

Por último, y a título de comentario, diremos que en realidad es absolutamente falso el referirse a "la" Teoría de la Plasticidad, ya que existen varias de estas teorías, y más aún, una multiplicidad enorme en la forma de aplicarlas a los distintos problemas.

En cuanto a la resolución de problemas en régimen plástico, y si bien hasta hace relativamente poco tiempo la forma usual de resolver problemas de este tipo era a través de la teoría de líneas de deslizamiento, ya hoy se han desarrollado una gran cantidad de técnicas numéricas, encaminadas a la resolución de problemas con ordenador, siendo naturalmente, ésta última línea más moderna la que se seguirá en los siguientes capítulos.

A continuación se dará una breve reseña histórica del desarrollo de las teorías de plasticidad, para pasar en el resto del capítulo, a recordar la forma, que para el medio continuo ideal, tienen las leyes del movimiento, así como los artificios que permiten hablar de esfuerzos interiores al medio en estudio y fijar su solución espacio-temporal, para un material elástico, como una introducción fundamental al estado plástico, y que al mismo tiempo puede servir como índice de la notación a utilizar en el resto.

1.2.- BREVE RESEÑA HISTORICA

El estudio científico de la plasticidad de metales puede considerarse que comenzó en 1864. En ese año Tresca publicó un conjunto de experimentos sobre perforación y extrusión que le condujeron a formular que un metal fluye plásticamente cuando la máxima tensión tangencial alcanza un cierto valor κ , constante para cada material, representando por la expresión $\tau_{\max} \leq \kappa$ el estado elástico.

Criterios para sólidos, principalmente suelos, habían sido propuestos previamente, por ejemplo por Coulomb (1773), y aplicados por Poncelet (1840) y Rankine (1853) a problemas tales como el cálculo de la presión de las tierras sobre muros de contención. Sin embargo estos criterios no tenían aplicación a metales.

De 1864 a 1872 Tresca realizó y publicó una ingente cantidad de experimentos y resultados presentados en sus "Memorias de Flujo" y "Memorias de Perforación". En estos 7 años de intenso trabajo los principales descubrimientos realizados por Tresca para metales fueron:

1) Que un sólido bajo suficiente presión puede fluir como los fluidos.

2) Que existe una región intermedia de endurecimiento plástico entre el límite elástico y la región de fluencia.

3) Que existe un coeficiente del material κ en términos de la máxima tensión cortante, para el cual, e independientemente de la forma y tamaño del bloque, el sólido fluye. El conocido criterio de Tresca ya comentado.

4) Para las perforaciones cilíndricas de bloques cilíndricos la longitud del material emitido L se puede dar en función del radio del punzón r y del radio del bloque R en la forma

$$L = r \left(1 + \ln \frac{R}{r} \right).$$

5) Que el flujo plástico de sólidos es isocórico.

Como se ve todos ellos son resultados fundamentales en la teoría de Plasticidad y bases de desarrollos posteriores, (vease fig 1.1 y 1.2). *Appareil employé pour la compression du plomb et des pâtes céramiques.*

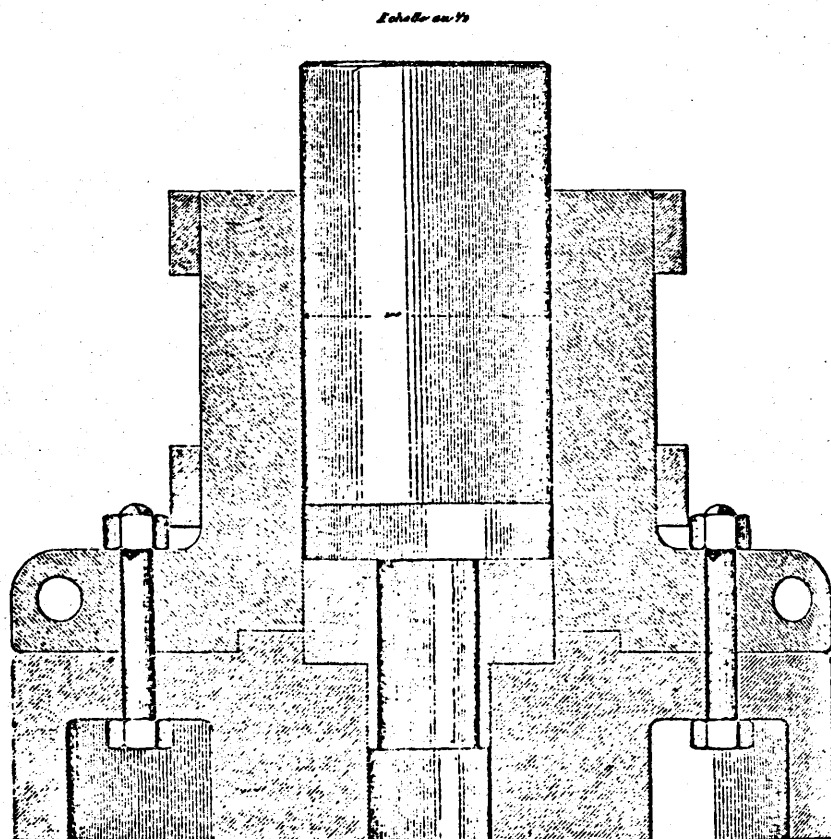
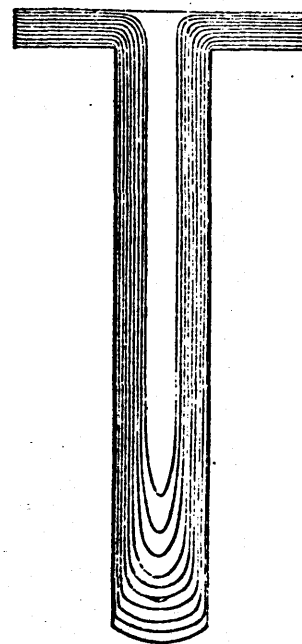


fig.- 1.1

TRESCA (1868)



Experimentos y Resultados
de TRESCA (1868)

fig.- 1.2

El criterio de Tresca fue aplicado por Saint-Venant para determinar las tensiones en un cilindro parcialmente plastificado sujeto a torsión o flexión (1870). Saint-Venant también desarrolló un conjunto de 5 ecuaciones de campo para relacionar tensiones y deformaciones en un flujo plástico bidimensional. Reconociendo que no existe ninguna relación entre tensiones y deformaciones plásticas totales, propuso que las direcciones de máxima variación de deformación tangencial coincidían en cada momento con las direcciones de máxima deformación cortante.

Saint-Venant se apartó pues del típico y simple modelo plástico según el cual existía una relación entre deformaciones totales y tensiones en un punto, a partir de un determinado umbral de tensión que correspondería al criterio de plastificación, y que físicamente podría representarse para el cuerpo plástico ideal como dos -

elementos de fricción (vease fig. 1.3a). Por el contrario Saint-Venant propuso un modelo en el que las tensiones se encontraban relacionadas con la variación de deformación y no con la total, pudiendo representarse este modelo con un amortiguador (vease fig. 1.3b).

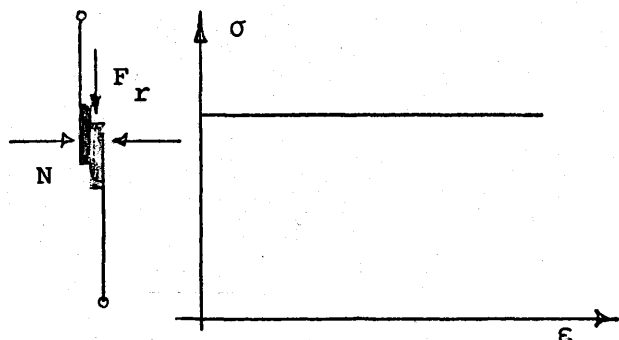


fig.- 1.3.a

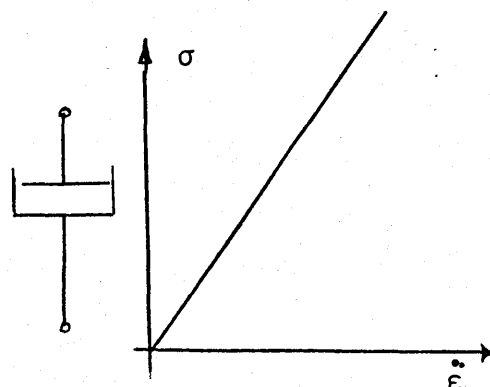


fig.- 1.3.b

Como continuación de estos trabajos de Saint-Venant, Levy en (1871) desarrolló un modelo de flujo tridimensional basado en las teorías de aquél.

Paralelamente a estos trabajos Johann Bauschinger realizaba una serie de experimentos, sobre la variación del límite elástico y límite de fluencia en función del tiempo y de los ciclos de carga y descarga, que fueron publicados de 1875 a 1886 y de los cuales el más importante sin duda fue presentado en 1877 para según él "estudiar el recién descubierto fenómeno del efecto del tiempo sobre el límite elástico", en el acero Bessemer. La tabla 1.1 muestra las cargas medidas, las elongaciones y tiempos, incluyendo una interrupción de 18 horas, a partir de los cuales extrañamente no dedujo el efecto principal como era la bajada del límite elástico en la segunda carga cuando ésta era de signo contrario a la primera, es decir lo que ahora se conoce como "efecto Bauschinger", sino que solo tuvo en cuenta la influencia del tiempo sobre el límite elástico.

Ello no quita importancia al trabajo de Bauschinger, que constituye uno de los pilares fundamentales de la Teoría de Plasticidad.

TABLA.- 1.1

Table 123. BAUSCHINGER (1886). Round rod of wrought iron tested in tension (Lab. # 93)

Original condition Round arc scale Cross-section = 2.50 cm Initial length = 15.00 cm				7 min after end of previous test Round arc scale Cross-section = 2.50 cm Initial length = 15.10 cm				62 h after end of last test Round arc scale Cross-section = 2.495 cm Initial length = 15.13 cm		
Load (tons)	Elon- gation (¹ / ₁₀₀₀ cm)	Diff.	Time	Load (tons)	Elon- gation (¹ / ₁₀₀₀ cm)	Diff.	Time	Load (tons)	Elon- gation (¹ / ₁₀₀₀ cm)	Diff.
0	0	143		0	0	149	4 h 56'	0	0	150
1	1.43	146		1	1.49	150	4 h 57'	1	1.50	150
2	2.89	143		2	2.99	153	4 h 58'	2	3.00	151
3	4.32	143		3	4.52	155	4 h 59'	3	4.51	151
4	5.75			4	6.07		5 h 0'	4	6.02	
0	0.05			0	0.05		5 h 1'	0	0.02	
4	5.73	143		4	6.07	156	5 h 2'	4	6.01	154
5	7.16	145		5	7.63	157	5 h 3'	5	7.55	151
6	8.61	145		6	9.20	164	5 h 4'	6	9.06	154
7	10.06	142		7	10.84	167	5 h 5'	7	10.60	151
8	11.48			8	12.51		5 h 6'	8	12.11	
0	0.02			0	0.15		5 h 7'	0	0.04	
8	11.48			8	12.51		5 h 8'	8	12.11	
8.5	12.17	69		8.5	13.33	82	5 h 9'	8.5	12.88	77
9	12.90	73		9	14.22	89	5 h 10'	9	13.63	75
9.5	13.67	77		9.5	15.10	88	5 h 11'	9.5	14.41	78
10	14.59	92		10	16.13	103	5 h 12'	10	15.91	78
0	0.13			0	0.45		5 h 13'	0	0.06	
10	14.72			10	16.28		5 h 14'	10	15.17	
10.1	14.97	25		10.5	17.50		5 h 15'	10.5	15.96	79
10.2	15.17	20		10.6	18.06	56	5 h 16'	10.5	15.96	79
10.3	15.36	19	4 h 19'	10.7	18.91	85	5 h 17'	11	16.75	82
10.4	15.60	24	4 h 22'	10.8	19.79	88	5 h 18'	11.5	17.57	101
10.5	15.80	20	4 h 25'	10.9	20.86	107	5 h 19'	12	18.58	
10.6	16.15	35	4 h 28'	11.0	22.47	161	5 h 20'	0	0.32	
10.7	17.10	95	4 h 31'	11.1	Scales	775	5 h 21'	12	18.69	114
10.8	Scales		4 h 34'		ran			12.1	19.83	227
	ran	9789			through			12.2	22.10	200
	so				so			12.3	24.10	168
	rapidly				rapidly			12.4	25.78	195
	that no				that no			12.5	27.73	340
	reading				reading			12.6	31.13	
	could be				could be			12.7		11145
	made				made			12.7	142.58	
10.8	114.99		4 h 49'	11.1	30.22	824	5 h 34'	0	120.65	
0	97.30			11.2	38.46	1620	5 h 40'	0	120.53	
				11.3	54.66		5 h 52'	0	120.47	
				0	35.91		5 h 54'	0	120.44	
				0	35.83		5 h 57'	0	120.42	
				0	35.67		after	0	120.41	
							15 h	0	120.37	
								0	120.32	

Test 3202: 24 March, 1880

Test 3202: 24 March, 1880

Test 3202: 27 March, 1880

No parece haber habido ningún avance significativo, salvo - quizás los trabajos de Spring y Tamman sobre el flujo de sólidos bajo altas presiones, hasta el final del siglo XIX cuando Guest investigó la plastificación de tubos bajo la combinación de esfuerzos - axil y presión interna obteniendo resultados muy aproximados a los predichos por el criterio de Tresca.

Durante la década siguiente se realizaron muchos experimentos similares, principalmente en Inglaterra, con conclusiones escasamente diferentes. Al mismo tiempo se sugirieron nuevos criterios de plastificación para metales, el más satisfactorio de los cuales fue presentado por Von Mises en 1913, sobre consideraciones matemáticas exclusivamente, siendo interpretado por Hencky algunos años más tarde en la forma siguiente: "la fluencia se produce cuando la energía de deformación desviadora alcanza un valor crítico". Von Mises también independientemente propuso ecuaciones de flujo similares a las de Levy en la forma siguiente:

$$\sigma'_{ij} = \frac{K}{\sqrt{J_2}} \epsilon'_{ij}$$

En 1920 y 1921 Prandtl mostró que el problema plástico bidimensional es hiperbólico, mientras paralelamente Nadai realizaba ensayos que de alguna forma recopilaban los trabajos publicados hasta ese instante.

En 1923 Hencky ratificó los resultados de Prandtl y descubrió propiedades geométricas simples en el campo de líneas de deslizamiento en un estado de deformaciones plásticas planas. De todas formas, hizo falta algún tiempo hasta que las ecuaciones de campo que gobernaban la velocidad del flujo a lo largo de las líneas de deslizamiento fueron obtenidas por Geiringer en 1930 y modificadas y mejoradas en 1945 y 49. En 1925 se realizó la primera aplicación efectiva de las teorías anteriores a un proceso tecnológico por Von Karman, que analizó el estado de tensiones en laminación. En el año siguiente Siebel aplicó las mismas teorías al estirado.

No fue hasta 1926 cuando Lode midió las deformaciones en tubos de varios metales bajo esfuerzo axial y presión interna combinados, que demostraron que el criterio de Levy-Mises era muy bueno para una primera aproximación en metales. Sin embargo los resultados de Lode mostraron algunas divergencias, aunque leves, con el criterio de Von-Mises que fueron confirmadas por Taylor y Quinney en 1931, pero que no reducen la importancia de este criterio y su aplicabilidad. (fig. 1.4)

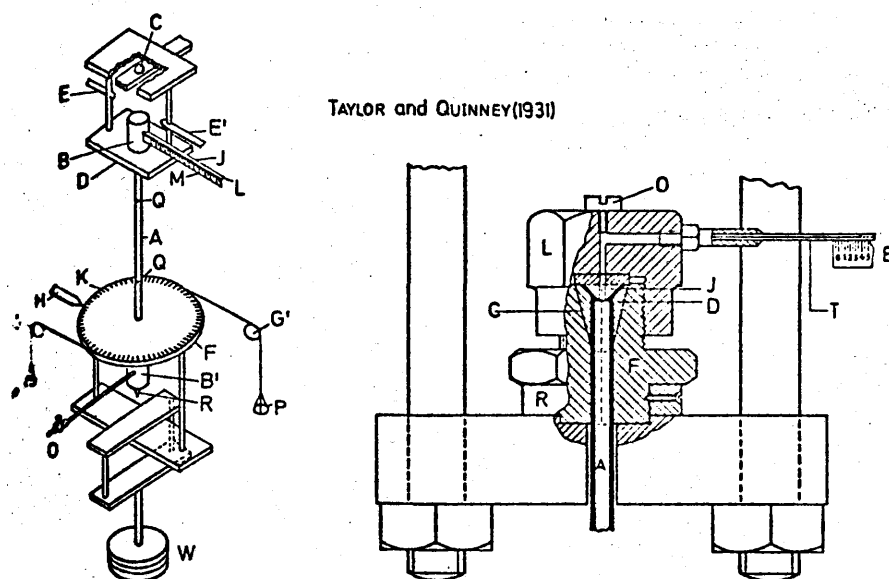


Fig. 4.53. TAYLOR and QUINNEY tension-torsion apparatus.

fig.- 1.4

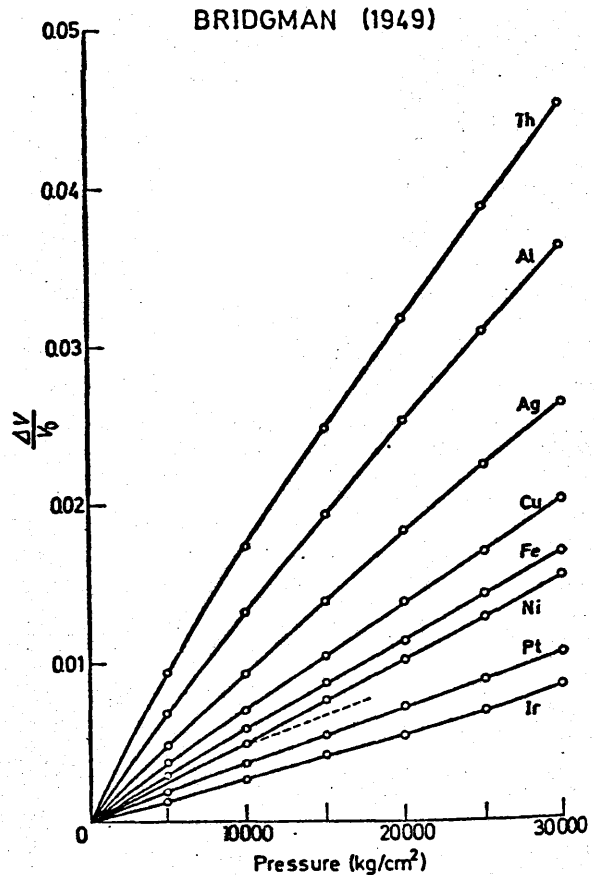
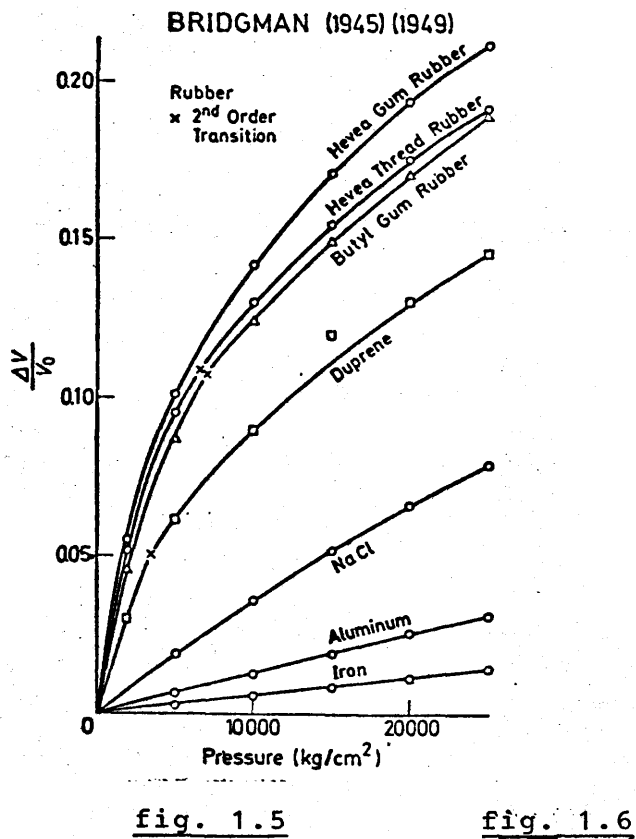
Esta teoria completa inicial de Von Mises fue generalizada a continuación en dos direcciones, una por Reuss (1930) que introdujo la componente elástica de la deformación siguiendo una idea de Prandtl, y la otra por Schmidt (1932) y Odquist (1933), que mostró cómo el endurecimiento por deformación puede introducirse en el esquema de las ecuaciones de Levy-Mises. La primera generalización fue ampliamente confirmada por los experimentos de Hohenemser (1931-32) y la segunda por las investigaciones de Schmidt.

Con ello, parece que quedó definida la base fundamental de la teoria Clásica de Plasticidad, si bien otra distinta propuesta por Hencky en 1924 para pequeñas deformaciones plásticas fue confirmada también por resultados experimentales, mostrandose para estos casos tan buena como la anterior.

En este mismo tiempo es conveniente destacar los ensayos de Bridgman sobre el flujo a altas presiones, resultados que fueron presentados en la década de los 30 y corregidos en los 40 obteniendo relaciones entre el cambio de volumen porcentual y la presión aplicada en la forma.

$$-\frac{\Delta V}{V_0} = a p - b p^2$$

donde a y b son constantes del material, que sufren varios cambios bruscos durante el proceso de flujo, que él denominó transiciones de primer, segundo orden. En cualquier caso, los valores de a y b son del orden de 10^{-7} y 10^{-12} respectivamente lo que justifica la afirmación de que el incremento de volumen es despreciable hasta presiones hidrostáticas muy altas por lo que se puede considerar al material como incomprensible. (fig. 1.5 y fig. 1.6)



Realmente pocos resultados se consiguieron a partir de ese momento hasta la aparición del famoso libro de Hill en 1950, que recopila los anteriores y las aplicaciones más importantes y que aunque todavía propone métodos clásicos de resolución, continua siendo una piedra angular de la Plasticidad.

A partir de ese momento y fundamentalmente debido a la aparición del ordenador, se produjo una explosión en la Teoría en dos frentes principalmente: la aplicación de ésta a la resolución de problemas con métodos numéricos, y el desarrollo de nuevas teorías (o ampliaciones de la inicial) en problemas y materiales complejos - como el hormigón y suelos.

Los primeros trabajos computacionales en plasticidad fueron las tesis doctorales de Marcal y Swedlow y el trabajo realizado por Mendelson que culminó en un texto clásico en esta materia.

Dos temas importantes aparecieron en las primeras contribuciones con ordenador. Primero, que el mismo tipo de problema plástico podría conducir a diferentes resultados, dependiendo del comportamiento del material. Segundo la aparente capacidad del ordenador para resolver problemas complejos, impuso la necesidad de nuevas contribuciones técnicas a la Teoría, sobre todo en materiales diferentes a los metales.

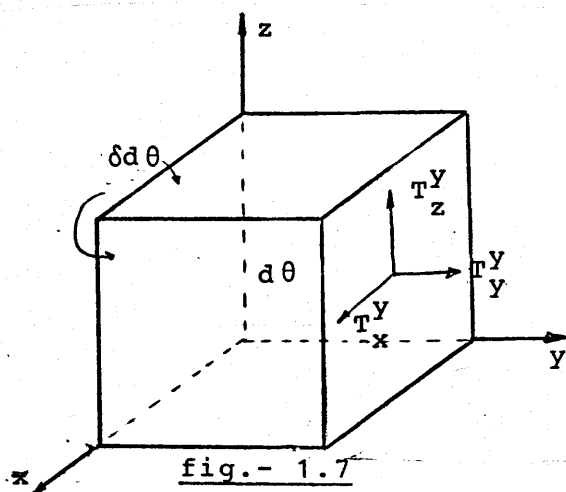
En este primer apartado debemos destacar los nombres, de todos conocidos, de Hinton, Owen, Zienkiewicz y Oden en la aplicación del método de los elementos finitos al campo plástico, de Swedlow y Mendelson en aspectos computacionales generales y aplicaciones a casos complicados.

En el apartado de ampliación de la Teoría debemos citar al grupo de Cambridge (Roscoe, Smith, Wroth), así como Caquot (curva de resistencia intrínseca), Desai, Mroz y Prevost en la aplicación de la Teoría de Plasticidad a suelos, a Chen en el campo del hormigón, y Phillips en cuanto a la influencia de la temperatura en la plasticificación. Por último citar también los ensayos de Briggs y Von Karman en el comportamiento de rocas.

Para finalizar podemos citar los esfuerzos de algunos autores, como Cruse, Banerjee y Brebbia en la introducción del método numérico de las ecuaciones integrales de contorno a plasticidad. Esos esfuerzos que siguen desarrollándose sin pausa en los momentos actuales y que presume serán la base del desarrollo plástico en el campo numérico en la década de los 80.

1.3.- ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN TENSIONES

Sea un medio continuo sin conexión microscópica con los medios reales, del que se aísla un dominio D mediante un contorno δD , y en cuyo interior se toma un elemento de volumen $d\theta$, cuya masa se obtiene a través de una medida ρ (densidad), propia de cada material, en la forma $dm = \rho d\theta$. Las acciones exteriores se suponen de dos tipos: fuerzas por unidad de volumen \underline{x} y fuerzas por unidad de superficie \underline{T}^u . Si las fuerzas de superficie que actúan sobre cada uno de los planos las dividimos en cada uno de los tres ejes - coordenados tendremos para el plano, por ejemplo, perpendicular al eje y (véase fig. 1.7).



$$\underline{T}^y = \begin{bmatrix} T_x^y \\ T_y^y \\ T_z^y \end{bmatrix}$$

A estas fuerzas por unidad de superficie correspondientes a un plano interior al cuerpo las denominaremos vector tensión en un plano y un punto.

Se observa pues que la magnitud tensión es una magnitud supravectorial ya que no está definida solo mediante el módulo, dirección, sentido y punto de aplicación, sino también es necesario definir el plano donde actúa. Es una magnitud tensorial de segundo orden, según resulta de aplicar la regla de cociente a la expresión del "vector tensión" que veremos más adelante.

El estado de tensiones en un punto queda definido por los vectores tensión sobre tres planos perpendiculares que inciden en el punto anterior, y que podemos tomar como los tres planos perpendiculares a los ejes coordenados.

El tensor pues quedará definido en un punto por tres vectores \underline{T}^x , \underline{T}^y , \underline{T}^z , en la forma

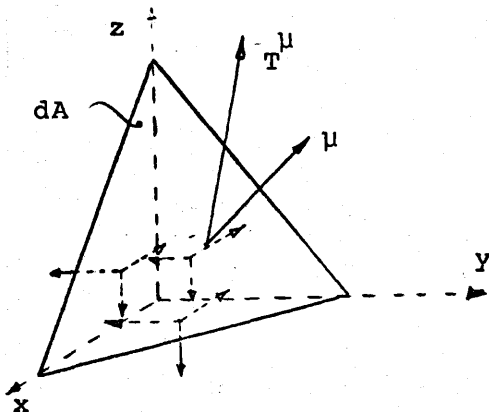
$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} T_x^x & T_x^y & T_x^z \\ T_y^x & T_y^y & T_y^z \\ T_z^x & T_z^y & T_z^z \end{pmatrix}$$

o en una forma más usual.

$$\underline{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

donde σ_{ij} es la notación habitual del tensor de tensiones en forma indicial, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ representan los componentes de las tensiones normales a los planos, y τ las componentes tangenciales a los planos.

Veamos que efectivamente este tensor define el estado de tensiones en un punto, de forma que en función de él puede obtenerse el vector tensión en cualquier plano de normal μ conocida, que pase por el punto en cuestión.



Efectivamente, estableciendo el equilibrio según los ejes en la figura se obtendría según el eje x por ejemplo.

fig.- 1.8

$$T_x^\mu dA = \sigma_x dA \mu_x + \tau_{yx} dA \mu_y + \tau_{zx} dA \mu_z$$

y análogamente para los otros dos ejes. Estas expresiones se pueden poner en la forma

$$\vec{T}^\mu = \begin{Bmatrix} T_x^\mu \\ T_y^\mu \\ T_z^\mu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{Bmatrix}$$

y en forma indicial.

$$T_i^\mu = \sigma_{ji} \mu_j \quad (1.1)$$

conviniéndose que la repetición de índices en un producto (la j en el segundo miembro) indica suma respecto a ese índice que denominaremos índice repetido; i, j varán de 1 a 3. (1.1) expresa claramente, según la regla de cociente, el caracter tensorial de σ_{ji} .

Con ello se ha conseguido la primera de las ecuaciones de equilibrio denominada "ecuación de equilibrio en el contorno", debido a que con ella es posible establecer el equilibrio, entre las fuerzas por unidad de superficie aplicada sobre puntos del contorno, y el estado de tensiones interno.

Una vez establecido el concepto de tensión y las fuerzas aplicadas sobre el dominio D , es posible el planteamiento de las ecuaciones de movimiento del continuo. Si el medio está dotado de una distribución de velocidad \underline{v} , y \underline{r} designa el vector de posición del elemento $d\theta$ respecto a un sistema de referencia, las ecuaciones de Euler para ese diferencial de volumen serían.

a) Igualdad entre las fuerzas actuantes sobre el sistema y la variación de su cantidad de movimiento.

$$\int_{d\theta} \underline{x} dV + \int_{\delta d\theta} \vec{T}^\mu dA = -\frac{D}{Dt} \int_{d\theta} \rho \underline{x} dV \quad (1.2)$$

b) Igualdad de los momentos de fuerzas y la variación del momento cinético.

$$\int_{d\theta} \underline{x} \wedge \underline{x} \, dV + \int_{\delta d\theta} \underline{x} \wedge \underline{T}^\mu \, dA = -\frac{D}{Dt} \int_{d\theta} \underline{x} \wedge \underline{v} \, dV \quad (1.3)$$

donde se recuerda que \underline{x} son las fuerzas exteriores por unidad de volumen.

Si introducimos la ecuación (1.1) en la (1.2) se tendría.

$$\int_{d\theta} \underline{x} \, dV + \int_{\delta d\theta} \underline{q} \underline{u} \, dA = -\frac{D}{Dt} \int_{d\theta} \rho \underline{v} \, dV$$

y si la planteamos para mayor facilidad en forma indicial.

$$\int_{d\theta} x_i \, dV + \int_{\delta d\theta} \sigma_{ji} \, \mu_j \, dA = -\frac{D}{Dt} \int_{d\theta} \rho v_i \, dV$$

Aplicando ahora el teorema de Stokes a la segunda integral es posible pasarla a integral de volumen en la forma

$$\int_{\delta d\theta} \sigma_{ji} \, \mu_j \, dA = \int_{d\theta} (\sigma_{ji,j}) \, dV$$

con lo que quedaría

$$\int_{d\theta} x_i \, dV + \int_{d\theta} (\sigma_{ji,j}) \, dV = -\frac{D}{Dt} \int_{d\theta} \rho v_i \, dV$$

donde la coma seguida de un índice se entiende como la derivada respecto a la coordenada de ese índice, por ejemplo:

$$\sigma_{j1,j} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}$$

Derivando la última integral y agrupando términos se obtiene

$$\int_{d\theta} (x_i + \sigma_{ji,j}) \, dV = \int_{d\theta} \left\{ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_{i,i} \right) \right\} dV$$

y como $-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_{i,i} = 0$ es la ecuación de continuidad o de conservación de la masa en un medio continuo se tiene

$$x_i + \sigma_{ji,j} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (1.4)$$

que constituye la segunda ecuación de equilibrio o "ecuación de equilibrio interno", en el caso dinámico, convirtiéndose en

$$x_i + \sigma_{ji,j} = 0 \quad (1.5)$$

en el caso estático, con aceleraciones $-\frac{\partial v_i}{\partial t}$ nulas.

Fijandonos en la ecuación (1.3), escribiendola también en forma indicial, y teniendo en cuenta que

$a \wedge b = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ donde ϵ_{ijk} es el índice de permutación definido como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ es cíclico} \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ó } j = k \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es anticíclico} \end{cases}$$

la ecuación (1.3) queda.

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \theta} \epsilon_{ijk} x_j x_k dv + \int_{\delta \partial \theta} \epsilon_{ijk} x_j T_k^\mu dA = \\ & = \int_{d\theta} \epsilon_{ijk} \left\{ x_j v_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial (x_j v_k)}{\partial t} \right\} dv \end{aligned}$$

Empleando la ecuación (1.1) y aplicando de nuevo el teorema de Stokes queda

$$\begin{aligned} & \int_{d\theta} \epsilon_{ijk} \{ x_j x_k + (x_j \sigma_{lk})_{,l} \} dv = \\ & = \int_{d\theta} \epsilon_{ijk} \left\{ x_j v_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial (x_j v_k)}{\partial t} \right\} dv \end{aligned}$$

Pero

$$(x_j \sigma_{lk})_{,l} = x_j \sigma_{lk,l} + \delta_{jl} \sigma_{lk} = x_j \sigma_{lk,l} + \sigma_{jk}$$

y además

$$\epsilon_{ijk} \left\{ x_j v_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial (x_j v_k)}{\partial t} \right\} = \epsilon_{ijk} \rho \left\{ v_j v_k + x_j \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\}$$

suponiendo que ρ es constante a lo largo del tiempo.

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en la ecuación anterior se tiene

$$\int_{d\theta} \epsilon_{ijk} \left\{ x_j x_k + x_j \sigma_{lk,l} + \sigma_{jk} - \rho v_j v_k - \rho x_j \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\} dv = 0$$

o lo que es igual

$$\int_{d\theta} \left\{ \epsilon_{ijk} x_j (x_k + \sigma_{lk,l} - \rho \frac{\partial v_k}{\partial t}) + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} - \epsilon_{ijk} \rho v_j v_k \right\} dv = 0$$

Pero el término entre paréntesis es nulo por la ecuación (1.4) y además $\epsilon_{ijk} v_j v_k = 0$ también pues representa el producto vectorial de dos vectores paralelos.

El resultado final pues sería

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$$

que se puede desarrollar como

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.6)$$

que representa la última ecuación de equilibrio, y cuyo significado es evidente ya que representa la simetría del tensor de tensiones, también llamado tensor de tensiones de Cauchy, cuando consideramos pequeñas deformaciones, como estamos haciendo hasta el momento.

1.4.- TENSIONES PRINCIPALES

Sabemos que la tensión es una magnitud tensorial. Habrá pues un sistema de referencia con unos determinados cosenos directores respecto al sistema original, tal que las tensiones tangenciales se anulen, quedando solo tensiones normales en los planos perpendiculares a los ejes de ese sistema de coordenadas.

Al sistema indicado se le denomina sistema de ejes principales y las tensiones normales a los tres planos principales se las denomina tensiones principales. Respecto a ese sistema de referencia el tensor de Cauchy tiene una expresión diagonal, siendo los elementos de la diagonal las tres tensiones principales σ_1 , σ_{11} y σ_{111} .

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_{11} & \\ & & \sigma_{111} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

El cálculo de estas tensiones principales se reduce a la resolución de un problema de autovalores $\underline{\sigma} - \sigma \underline{1} = 0$, deducible de la ecuación (1.1).

Efectivamente, el vector de tensiones en un plano principal será

$$T_i^{\mu p} = \sigma_{ji} \mu_j^p$$

y como se ha dicho este vector solo tiene componente normal al plano, ya que la tensión tangencial es nula, es decir

$$T_i^{\mu p} = \sigma \mu_i^p$$

Iguando ambas expresiones del vector tensión en ese plano tendremos

$$\sigma_{ji} \mu_j^p = \sigma \mu_i^p = \sigma \delta_{ij} \mu_j^p$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker que toma el valor 0 para $i \neq j$ y 1 para $i = j$. Con ello

$$(\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ij}) \mu_j^p = 0 \quad (1.8a)$$

y en notación matricial ($\delta_{ij} \equiv \underline{1}$)

$$(\underline{\sigma} - \sigma \underline{1}) \underline{\mu}_j^p = 0 \quad (1.8b)$$

que representa un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo que para que tenga una solución distinta de la trivial ha de tener el determinante nulo

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

Desarrollando este determinante se tiene

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 - J_2 \sigma - J_3 = 0 \quad (1.10)$$

donde J_1, J_2, J_3 son los coeficientes de la ecuación cúbica que proporciona los valores de las tres tensiones principales σ_1, σ_{11} y σ_{111} . Pero los valores de las tensiones principales son independientes del sistema de referencia adoptado, lo que quiere decir que los coeficientes de la ecuación característica anterior son invariantes respecto al sistema de referencia adoptado. El valor de cada uno de estos invariantes es el siguiente:

$$J_1 = \delta_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111}$$

$$J_2 = - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} =$$

$$= - (\sigma_1 \sigma_{11} + \sigma_{11} \sigma_{111} + \sigma_{111} \sigma_1)$$

$$J_3 = \left| \sigma_{ij} \right| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_{11} \sigma_{111}$$

El cálculo de las direcciones principales para cada una de las tensiones principales se realiza a continuación resolviendo el sistema de tres ecuaciones lineales (1.8b), dos solo de las cuales son independientes, junto a la condición de que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es uno.

$$(\sigma_x - \sigma) \mu_x + \tau_{xy} \mu_y + \tau_{xz} \mu_z = 0$$

$$\tau_{yz} \mu_x + (\sigma_y - \sigma) \mu_y + \tau_{yz} \mu_z = 0 \quad (1.12)$$

$$\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 = 1$$

Naturalmente existe la posibilidad de que las tres tensiones principales sean diferentes, con lo que se tendrán tres direcciones principales independientes, que no sería difícil demostrar son perpendiculares.

Si las soluciones de la ecuación cúbica son dos raíces iguales y una diferente, existirá una dirección principal correspondiente a la raíz diferente, y una variedad lineal de direcciones principales de dimensión dos, que será perpendicular a la dirección principal anterior. Es decir cualesquiera dos ejes situados en el plano perpendicular a la dirección inicial, junto con ésta pueden formar un sistema de direcciones principales.

Por último, si las tres tensiones son iguales, cualquier dirección del espacio puede ser una dirección principal.

También podría demostrarse, y puede verse en cualquier tratado especializado de Elasticidad, que las soluciones de la ecuación característica de un sistema de autovalores son siempre reales, por lo cual las tres posibilidades anteriores son las únicas que se pueden presentar.

A partir de estas tres posibilidades, es posible deducir - que el estado de tensiones en un punto puede representarse mediante un elipsoide de tensiones, o elipsoide de Lamé, donde el valor del módulo del radiovector de los puntos de ese elipsoide representa el valor del módulo del vector tensión en cada plano que pasa por ese punto. En el primer caso de tres tensiones principales diferentes - el elipsoide de tensiones tiene tres ejes diferentes y de valor - igual a cada una de las tres tensiones principales (fig. 1.9a). En el segundo caso el elipsoide es circular (1.9b) y en el tercero se tiene una esfera (1.9c)

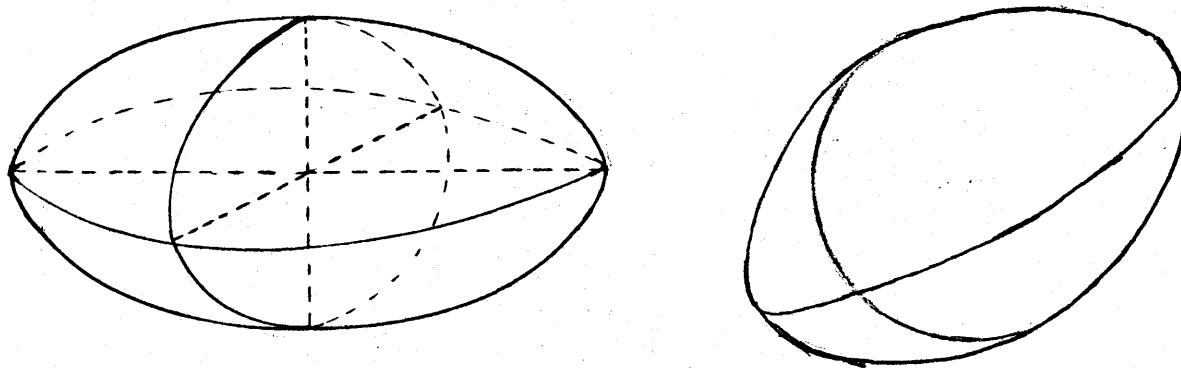


fig.- 1.9

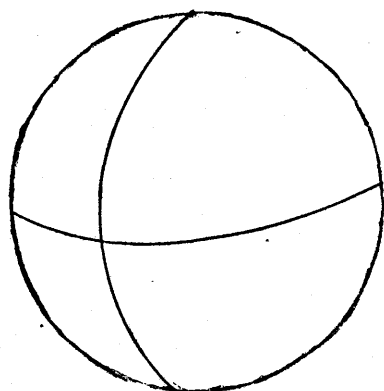


fig.- 1.9

Para terminar diremos que es usual, debido a la gran facilidad de uso, en el caso de utilizar el tensor de tensiones respecto a los ejes principales, expresarlo en forma vectorial trabajando exclusivamente con los tres elementos de la diagonal ya que el resto es cero

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

1.5.- TENSOR ESFERICO Y DESVIADOR.

Es usual en elasticidad, y más aún en plasticidad, el considerar el tensor de tensiones en un punto como suma de dos tensores. El primero, en principio, significa un estado hidrostático de tensiones, es decir un tensor diagonal con igual valor en cada uno de sus elementos, que se toma igual a la "tensión media" a que está sometido el cuerpo, entendiendo como ésta a la media aritmética de las tensiones principales, y que denominaremos "tensión octaédrica", debido a que representa la tensión normal que existe en un plano igualmente orientado respecto a los tres ejes principales, que corresponde realmente a una de las caras de un octaedro ficticio, centrado en el origen.

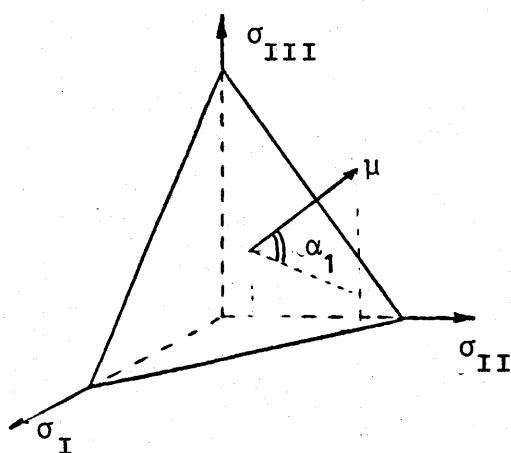


fig.-1.10

La tensión octaédrica será

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} = \frac{J_1}{3} \quad (1.13)$$

con lo que el primer tensor sería

$$\underline{\sigma}_{oct} = \sigma_{oct} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

y si lo expresamos, como el tensor principal de tensiones, en forma vectorial, se tendrá.

$$\sigma^{\text{oct}} = \sigma^{\text{oct}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La demostración de que σ^{oct} realmente corresponde a la tensión normal a un plano octaédrico es inmediata.

Efectivamente el vector tensión en ese plano sería

$$T^{\mu \text{oct}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{111} \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{111} \end{Bmatrix}$$

y la componente de este vector según la normal al plano sería.

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{oct}} &= (T^{\mu \text{oct}})^T \mu^{\text{oct}} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 \sigma_{11} \sigma_{111}) \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111}}{3} \end{aligned}$$

La tensión tangencial en dicho plano octaédrico sería.

$$\begin{aligned} \tau^{\text{oct}} &= \sqrt{|T^{\mu \text{oct}}|^2 - \sigma^{\text{oct}^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_{11}^2 + \sigma_{111}^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111})^2}{9}} = \\ &= \sqrt{\frac{(\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111})^2 - 2(\sigma_1 \sigma_{11} + \sigma_{11} \sigma_{111} + \sigma_{111} \sigma_1)}{3}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111})^2}{9}} = \sqrt{-\frac{2}{3}} \sqrt{-\frac{1}{3} J_1^2 + J_2} \quad (1.15)$$

Por último los tres invariantes correspondientes al tensor esférico tienen los siguientes valores

$$\begin{aligned} J_1^{\text{oct}} &= \sigma_{\text{oct}} \\ J_2^{\text{oct}} &= -\frac{\sigma_{\text{oct}}^2}{3} \\ J_3^{\text{oct}} &= \sigma_{\text{oct}}^3 \end{aligned} \quad (1.16)$$

El segundo tensor en el que se descompone el tensor de tensiones en un punto se denomina "tensor desviador" y lógicamente corresponde a la diferencia entre los dos tensores total y esférico. Expresándolo en tensiones principales.

$$\sigma_{ij}^d = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_{\text{oct}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11} - \sigma_{\text{oct}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{111} - \sigma_{\text{oct}} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_1 - \sigma_{\text{oct}} \\ \sigma_{11} - \sigma_{\text{oct}} \\ \sigma_{111} - \sigma_{\text{oct}} \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

Los invariantes correspondientes a este tensor y que se representan por J' son

$$J'_1 = 0$$

$$J'_2 = -[\sigma_1 \sigma_{11} + \sigma_{11} \sigma_{111} + \sigma_{111} \sigma_1 - 2 \sigma_{oct} (\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111})] + \\ + 3 \sigma_{oct}^2 = J_2 + \frac{1}{3} J_1^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{oct}^2 \quad (1.18)$$

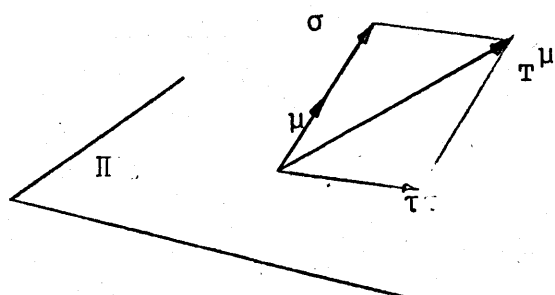
$$J'_3 = \sigma_1 \sigma_{11} \sigma_{111} + \sigma_{oct}^2 (\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111}) - \\ - \sigma_{oct} (\sigma_1 \sigma_{11} + \sigma_1 \sigma_{111} + \sigma_{11} \sigma_{111}) - \sigma_{oct}^3 = \\ = J_3 + J_1 J_2$$

La división del tensor de tensiones en estos dos viene justificada por el hecho de que el cambio de volumen del material viene determinado exclusivamente por el tensor esférico, mientras que en gran medida el nivel de tensiones para el cual se produce la plastificación de un material viene representado por el tensor desviador. Ambas afirmaciones se justificarán en los siguientes apartados.

1.6.- REPRESENTACION GEOMETRICA DEL TENSOR DE TENSIONES

Desde Cauchy, se han propuesto numerosas representaciones geométricas de σ_{ij} . En lo que se sigue se van a tratar exclusivamente aquellas de cuyo uso va a necesitarse con más frecuencia. Prescindiremos pues de las clásicas "cuádriga de Cauchy" y "elipsoide de Lamé" para concentrarnos en la representación de Mohr y en el espacio de tensiones principales.

Sea un plano π de normal $\underline{\mu}$ y sea \underline{T}^μ el vector tensión en ese plano correspondiente a un punto del dominio (fig. 1.11).



Sea σ la proyección de \underline{T} sobre la normal y τ sobre el plano.

$$\sigma = \underline{T}^\mu \cdot \underline{\mu}$$

$$\tau = \sqrt{|\underline{T}^\mu|^2 - \sigma^2}$$

fig.- 1.11

Teniendo en cuenta que $\underline{T}^\mu = \underline{\sigma} \cdot \underline{\mu}$ tenemos

$$|\underline{T}^\mu|^2 = \sigma_1^2 \mu_1^2 + \sigma_{11}^2 \mu_2^2 + \sigma_{111}^2 \mu_3^2$$

$$\sigma = \sigma_1 \mu_1^2 + \sigma_{11} \mu_2^2 + \sigma_{111} \mu_3^2$$

$$1 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$$

donde μ_1 , μ_2 y μ_3 están referidos al sistema principal de referencia.

Despejando de estas ecuaciones μ_1 , μ_2 y μ_3 se tiene

$$\mu_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_{11})(\sigma - \sigma_{111})}{(\sigma_1 - \sigma_{11})(\sigma_1 - \sigma_{111})}$$

$$\mu_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_{111})}{(\sigma_{11} - \sigma_{111})(\sigma_{11} - \sigma_1)}$$

$$\mu_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_{11})}{(\sigma_{111} - \sigma_1)(\sigma_{111} - \sigma_{11})}$$

Si el orden de los subíndices es tal que $\sigma_1 > \sigma_{11} > \sigma_{111}$, como los primeros miembros son positivos se obtienen las siguientes limitaciones para σ y τ .

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_{11})(\sigma - \sigma_{111}) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_{111}) < 0$$

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_{11}) > 0$$

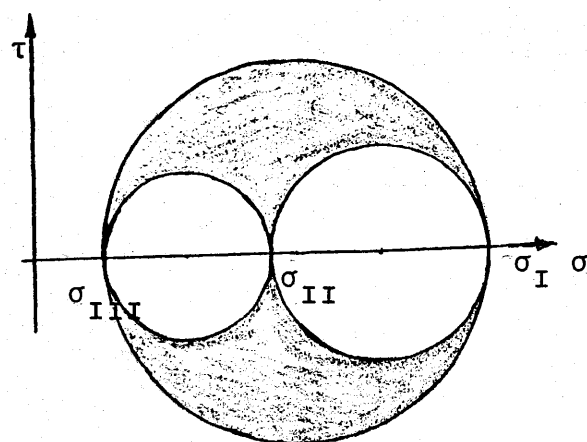


fig.-1.12

Es decir en un sistema de ejes (σ, τ) los valores que representan la tensión sobre un plano deben estar contenidos en el área sombreada y los cosenos directores de la normal al plano de actuación vienen representados por los μ_1, μ_2, μ_3 previos, (fig 1.12)

Si $\sigma_1 = \sigma_{11} = \sigma_{111} = \sigma$ el tensor es esférico y la representación se reduce a un punto. Si hay dos tensiones iguales estamos en un caso de revolución quedando indeterminados dos cosenos directores, mientras que todos los estados posibles quedarían representados en un solo círculo.

Una representación de un estado concreto se obtiene observando que las ecuaciones de condición anteriores representan la potencia del punto (σ, τ) en cuestión respecto a las circunferencias ya que se obtiene sustituyendo esas coordenadas en la ecuación de las mismas.

Como la potencia permanece constante en puntos que pertenecen a circunferencias concéntricas, el conocimiento de $\sigma_1, \sigma_{11}, \sigma_{111}$ y μ_1, μ_2, μ_3 permite tener (σ, τ) (la afirmación inversa se comprueba fácilmente mediante la siguiente construcción).

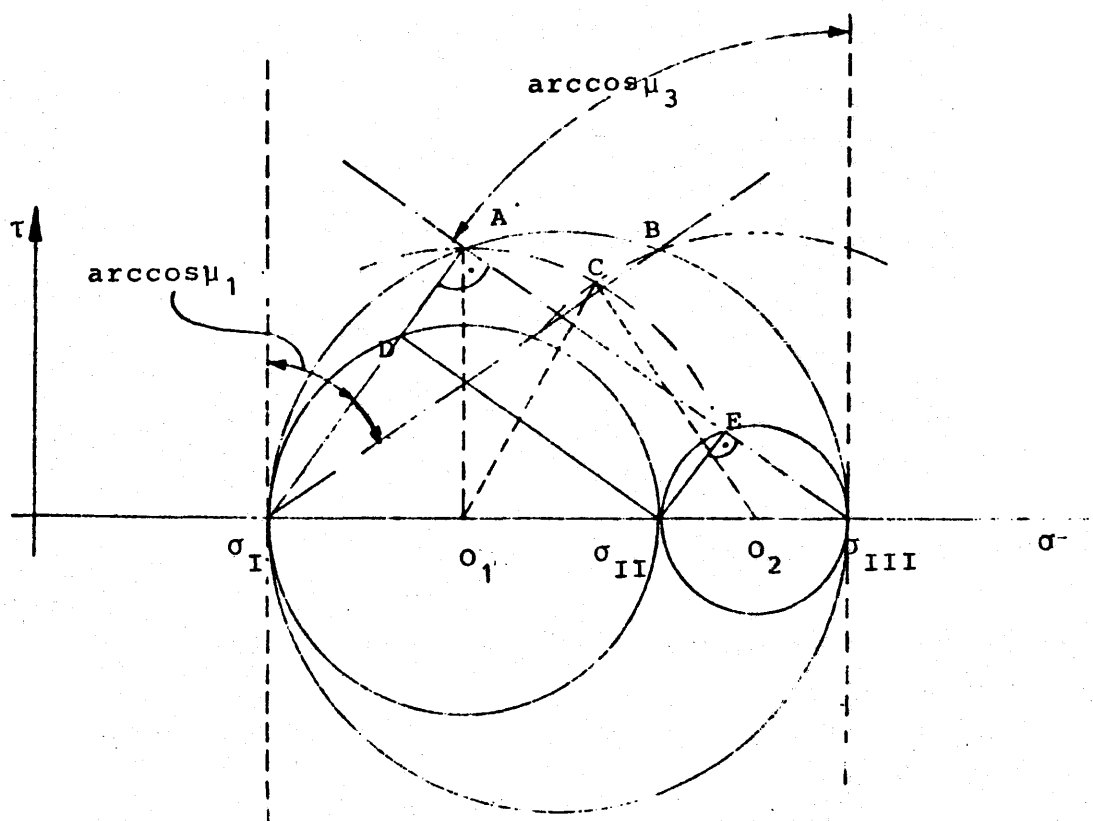


fig.- 1.13

Potencia de A respecto a $(\sigma_{11} \sigma_{111}) : \overline{AD} \overline{\sigma_{111} A}$

$$\overline{AD} = \overline{E \sigma_{11}} = (\sigma_1 - \sigma_{11}) \mu_1$$

$$\overline{\sigma_{111} A} = (\sigma_1 - \sigma_{111}) \mu_1$$

$$P_A = P_C = \tau^2 + (\sigma - \sigma_{11}) (\sigma - \sigma_{111}) = (\sigma_1 - \sigma_{11}) (\sigma_1 - \sigma_{111}) \mu_1^2 -$$

que es la primera igualdad de antes.

Si se trabaja ahora con la potencia respecto al círculo (σ_1, σ_{11}) se obtiene la tercera condición lo que comprueba la construcción propuesta. "Mediante arcos μ_1 y arcos μ_3 se determinan A y B y a partir de ellos con centros en O_1 y O_2 el punto C. A la inversa, de C se hallan μ_1 y μ_3 ".

Los círculos principales corresponden a los casos en que $\mu_i = 0$.

Por ejemplo si $\mu_3 = 0$ la construcción anterior produce siempre puntos sobre el círculo $(\sigma_1 \sigma_{11})$.

Siempre que estemos, pues, en alguno de estos casos bastará estudiar un solo círculo. Es el caso del problema plano en el que $\mu_3 = 0$, que además suele ser uno de los casos más corrientes.

En definitiva, los círculos de Mohr representan geométricamente y de forma completa el estado de tensiones en un determinado punto. Sin embargo, en muchos casos, interesa representar el estado de tensiones en todos los puntos del dominio, para lo cual habría que realizarlo en principio en un sistema de 9 variables (σ_{ij}) , aunque aprovechando la simetría de σ_{ij} solo sería necesario un sistema de 6 ejes, siendo fácilmente explicable la dificultad de esta representación en un plano. Podemos, sin embargo, conseguir una representación más simple si aprovechamos el concepto de tensiones principales, ya que la magnitud de estas solo está representada por 3 valores que es posible representar en un sistema tridimensio

nal. Así, el estado de tensiones en un punto de tensiones principales (5, 4, 2) puede representarse como

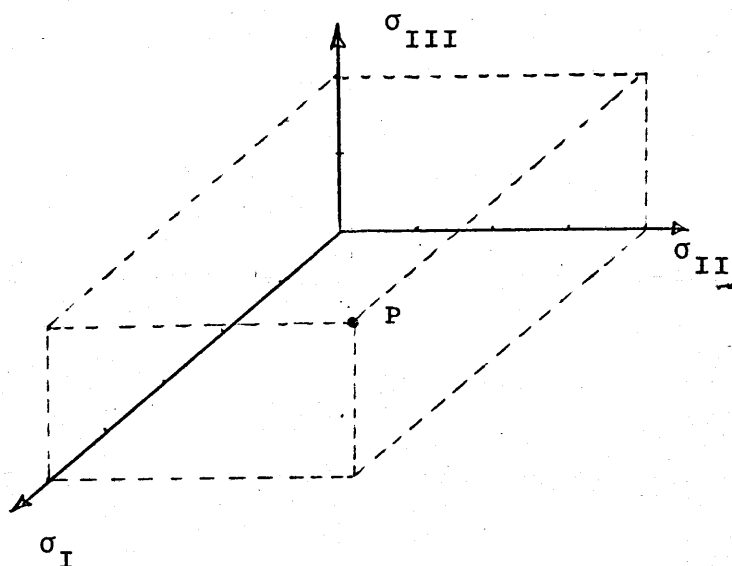


fig. 1.14

Naturalmente no queda totalmente definido el estado de tensiones (este es un tensor simétrico y siempre son necesarias 6 variables para definirlo) con las magnitudes de las tensiones principales, pues sería necesario también conocer las direcciones principales, pero si el cuerpo es isótropo es mucho más importante la magnitud que las direcciones de las tensiones principales, lo que explica la validez de esta representación.

En este sistema de tensiones principales la descomposición del "vector de tensiones principales" en el vector esférico y el desviador se representa mediante $\overline{OQ} = \overline{OQ'} + \overline{Q'Q}$ donde Q' es un punto de la diagonal principal del sistema de ejes y $\overline{Q'Q}$ es $\perp \overline{OQ'}$. Es decir el vector desviador es perpendicular al vector esférico (fig. 1.15). Efectivamente:

$$\sigma^{\text{oct}} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\text{oct}} \\ \sigma_{\text{oct}} \\ \sigma_{\text{oct}} \end{Bmatrix}; \sigma^{\text{d}} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 - \sigma_{\text{oct}} \\ \sigma_{11} - \sigma_{\text{oct}} \\ \sigma_{111} - \sigma_{\text{oct}} \end{Bmatrix}$$

$$(\underline{g}^{\text{oct}})^T \cdot \underline{g}^d = (\sigma_{\text{oct}} \quad \sigma_{\text{oct}} \quad \sigma_{\text{oct}}) \begin{Bmatrix} \sigma_1 & -\sigma_{\text{oct}} \\ \sigma_{11} & -\sigma_{\text{oct}} \\ \sigma_{111} & -\sigma_{\text{oct}} \end{Bmatrix} =$$

$$= \sigma_{\text{oct}} (\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111}) - 3 \sigma_{\text{oct}}^2 = 0$$

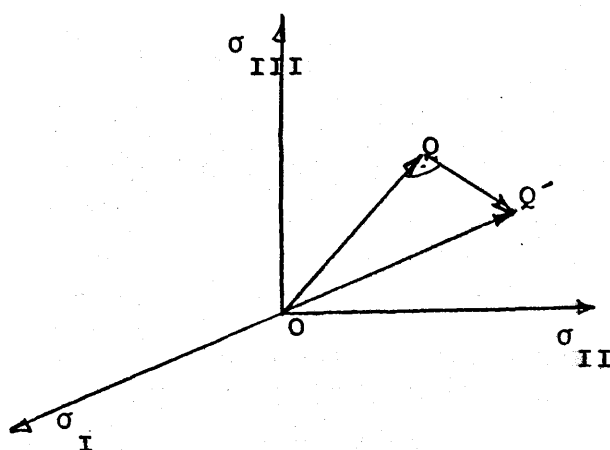


fig.-1.15

Si pensamos que el criterio de plastificación viene asociado al tensor desviador, como se verá en el Tema II, para estos plásticos, sería conveniente conseguir un sistema de proyección en el que los vectores desviadores se viesen en verdadera magnitud. Este sistema corresponde al de una proyección axonométrica isométrica, en el que se asocia el plano del papel a un plano perpendicular a la diagonal principal, es decir el plano donde se encuentran los vectores desviadores, y donde los tres ejes se ven a 120° cada uno.

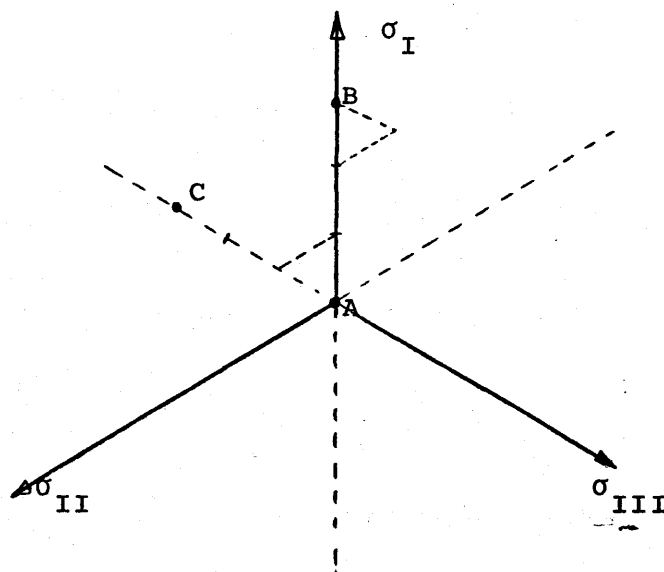


fig.-1.16

Así por ejemplo un vector esférico se vería como un punto en el origen de coordenadas (punto A), mientras que vectores uniaxiales se encuentran en los ejes principales. (punto B), (fig. 1.16).

Efectivamente, el vector $\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ podría descomponerse en

vector esférico y desviador en la forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{1/3} \\ \sigma_{1/3} \\ \sigma_{1/3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{2\sigma_1}{3} \\ -\frac{\sigma_1}{3} \\ -\frac{\sigma_1}{3} \end{Bmatrix}$$

Este último vector que es el desviador es el único que se representa en el plano de tensiones principales en verdadera magnitud, viniendo representado por el punto B.

Otro ejemplo podría ser el correspondiente al vector de tensiones

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2\sigma}{3} \\ -\frac{2\sigma}{3} \\ -\frac{2\sigma}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{\sigma}{3} \\ \frac{\sigma}{3} \\ -\frac{2\sigma}{3} \end{Bmatrix}$$

que viene representado por el punto C.

Veamos por último que en este sistema el vector de posición de un estado de tensiones en este sistema tiene el módulo proporcional a los invariantes desviadores.

El vector que representamos en este sistema es el vector desviador de módulo.

$$\begin{aligned} |\underline{g}'|^2 &= \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 = (\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3')^2 - \\ &- 2(\sigma_1' \sigma_2' + \sigma_2' \sigma_3' + \sigma_3' \sigma_1') = J_1'^2 + 2 J_2' \end{aligned}$$

y como $J_1' = 0$ según se vió

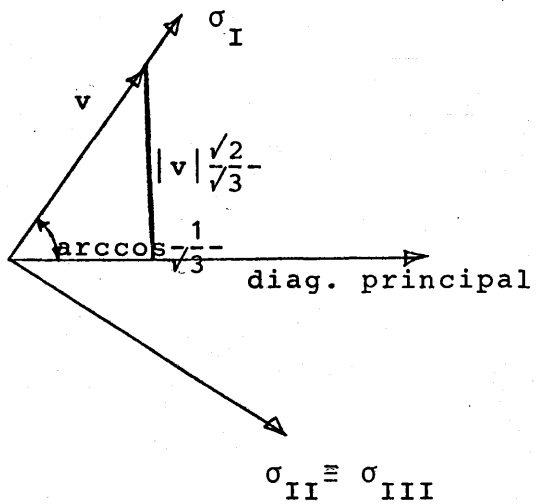
$$|\underline{g}'| = \sqrt{2 J_2'} \quad (1.20)$$

Este sistema de representación, denominado de Haig- Wess- tergaard es el que se utilizará con mayor profusión en plasticidad.

Una propiedad muy útil para representar estos vectores se obtiene viendo como se proyecta un vector uniaxial en el espacio de tensiones principales.

Observando la figura adjunta se observa que la proyección es

$$\sqrt{-\frac{2}{3}} |\underline{v}|.$$



Otra forma de verlo sería calculando el módulo del vector desviador que sería $\sqrt{2 J'_2}$ que para un es

tado uniaxial toma la forma

$$J'_2 = -\frac{1}{3} \sigma_1^2$$

$$|v| = \sqrt{2 J'_2} = \sqrt{-\frac{2}{3}} \sigma_1$$

como hemos visto anteriormente.

fig.-1.17

1.7.- ESTUDIO DE LA DEFORMACION.

Dentro del concepto de deformación queda implícita la comparación de la situación espacial del sólido en estudio antes y después del proceso de carga, eliminando de la segunda posición los movimientos como sólido rígido (traslación y giro).

Un planteamiento general del problema se puede conseguir imaginando dos sistemas de coordenadas curvilíneas a_i , x_i - uno para cada uno de los estados anterior y posterior a la deformación respectivamente.

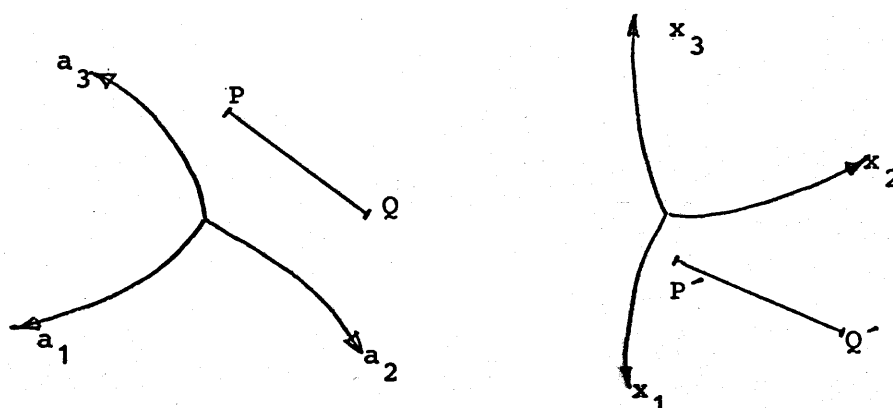


fig.- 1.18

Denominaremos al sistema (a_1, a_2, a_3) "sistema inicial" y al (x_1, x_2, x_3) "sistema final", relacionados mediante $x_i = x_i(a_1, a_2, a_3)$, y $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$.

Sean dos puntos P y Q en el sistema inicial cuyos transformados en el sistema final son P' y Q' estando los puntos P y Q y P' y Q' situados a una distancia infinitesimal.

El valor de esta distancia en cada uno de los dos sistemas es

$$ds_o^2 = a_{ij} da_i da_j$$

$$ds^2 = g_{kl} dx_k dx_l$$

donde a_{ij} es el tensor métrico euclídeo en el sistema inicial y g_{kl} es el tensor métrico euclídeo en el sistema final. Nótese que para un sistema cartesiano el tensor métrico euclídeo es la delta de Kronecker δ_{ij} , de tal forma que

$$ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = dx_i \cdot dx_i = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Podemos ahora obtener la diferencia entre estas dos distancias ds y ds_0 siempre y cuando esta diferencia se realice refiriendonos a un sistema de coordenadas común, ya sea el inicial o el final.

Si tomamos como referencia el sistema inicial tendremos

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{kl} dx_k dx_l = g_{kl} \left(-\frac{\partial x_k}{\partial a_i} da_i \right) \left(-\frac{\partial x_l}{\partial a_j} da_j \right) = \\ &= g_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_l}{\partial a_j} da_i da_j \end{aligned}$$

$$ds_0^2 = a_{ij} da_i da_j$$

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= \left(g_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_l}{\partial a_j} - a_{ij} \right) da_i da_j = \\ &= 2 E_{ij} da_i da_j \end{aligned}$$

siendo

$$E_{ij} = 1/2 \left(g_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_l}{\partial a_j} - a_{ij} \right) \quad (1.21)$$

Al tensor E_{ij} se le denomina tensor de Green-Saint Venant y corresponde a un tensor de deformaciones en coordenadas del sistema inicial.

Analogamente, si utilizamos como sistema de referencia el final tendremos

$$ds^2 = g_{kl} dx_k dx_l$$

$$ds_o^2 = a_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dx_k \frac{\partial a_j}{\partial x_l} dx_l = a_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial a_j}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_o^2 &= (g_{kl} - a_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial a_j}{\partial x_l}) dx_k dx_l = \\ &= 2 e_{kl} dx_k dx_l \end{aligned}$$

siendo

$$e_{kl} = 1/2 (g_{kl} - a_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial a_j}{\partial x_l}) \quad (1.22)$$

Al tensor e_{kl} se le denomina de Cauchy-Almansi.

Para el caso en que a_i y x_k sean dos sistemas coordenados cartesianos rectangulares puede simplificarse el proceso, definiendo un vector desplazamiento u_i de tal forma que $x_i = a_i + u_i$ y además recordando que para esta clase de sistemas coordenados

$$g_{kl} = \delta_{kl} \quad a_{ij} = \delta_{ij}$$

Derivando la relación entre x_i y a_i queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} &= \delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \\ \frac{\partial a_i}{\partial x_k} &= \delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Con lo que en nuestro caso los dos tensores anteriormente definidos quedan

$$\begin{aligned} E_{ij} &= 1/2 \{ \delta_{kl} (\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i}) (\delta_{lj} + \frac{\partial u_l}{\partial a_j}) - \delta_{ij} \} = \\ &= 1/2 \{ \delta_{kl} \delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kl} (\delta_{ki} \frac{\partial u_l}{\partial a_j} + \delta_{lj} \frac{\partial u_k}{\partial a_i}) + \delta_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_l}{\partial a_j} - \delta_{ij} \} \end{aligned}$$

$$E_{ij} = 1/2 \left(-\frac{\partial u_i}{\partial a_j} - \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad (1.23)$$

y del mismo modo podría obtenerse

$$e_{ij} = 1/2 \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.24)$$

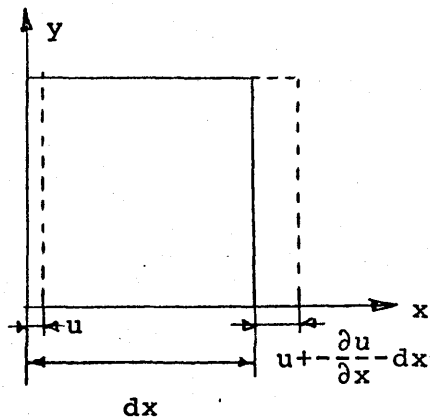
En estas dos últimas expresiones se observa que las derivadas, están referidas, como es lógico, al sistema de coordenadas elegido, es decir el tensor de deformación de Green está referido a la configuración inicial sin deformar, mientras que en el tensor de deformación de Almansi están referidas al sistema deformado final.

Si consideramos que las deformaciones van a ser pequeñas hasta el punto de poder desprestigiar las derivadas segundas, y de hacer equivalentes las derivadas primeras respecto al sistema original con las derivadas primeras respecto al sistema final, - que es el caso más usual y que vamos a utilizar normalmente, se tendrá que ambas expresiones se confunden en una misma, que se denomina tensor de Cauchy de pequeñas deformaciones, cuya expresión es

$$e_{ij} = E_{ij} = \epsilon_{ij} = 1/2 \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.25)$$

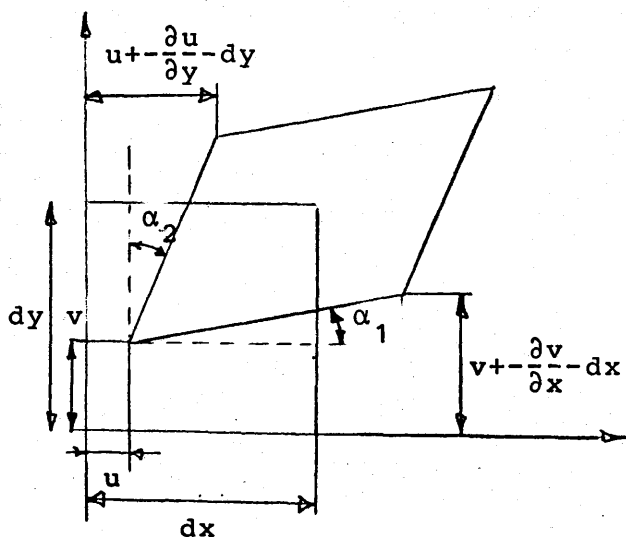
El significado físico de los términos de este tensor es bien conocido y se obtiene, simplemente escogiendo posiciones particulares de los puntos PQ antes de la deformación.

Así, por ejemplo, los términos de la diagonal principal del tensor $\epsilon_{11} = \epsilon_x$, $\epsilon_{22} = \epsilon_y$, $\epsilon_{33} = \epsilon_z$ son los alargamientos unitarios según los tres ejes coordenados, como puede verse en fig 1.19, mientras que los términos ϵ_{ij} con $i \neq j$ representan la variación del ángulo formado por las direcciones i y j de las direcciones coordenadas, como también puede verse en la fig. 1.19



$$\Delta L = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \quad (1.26)$$



$$\alpha_1 \sim \tan \alpha_1 = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\alpha_2 \sim \tan \alpha_2 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \epsilon_{xy} \quad (1.27)$$

fig.- 1.19

Ahora bien, puede ser interesante contemplar desde la óptica anterior cómo el tensor de Cauchy es realmente el tensor de deformaciones, que surge al eliminar de la transformación total de un segmento los movimientos como sólido rígido.

Si P se traslada a P' y Q se encuentra en un entorno de P, como estamos admitiendo pequeñas deformaciones, se admite que la transformación es tal que transforma entornos en entornos, es decir el cambio es continuo.

Así pues $\underline{a} + \underline{da}$ se transforma en $\underline{x} + \underline{dx} = \underline{a} + \underline{u} + \underline{da} + \underline{du}$ con lo que $\underline{dx} - \underline{da}$ que es la medida del incremento de longitud PQ buscado será

$$dx_i - da_i = du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j$$

$$dx_i = da_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j$$

$$dx_i = da_i + \epsilon_{ij} dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j \quad (1.28)$$

Expresión en la que se observa que la diferencial de longitud en el estado deformado está compuesta de la diferencial de longitud en el estado indeformado (traslación) más un término de deformación, más un último término de giro.

En definitiva la deformación en un punto queda definida por un tensor ϵ_{ij} , que para pequeñas deformaciones viene definido por la siguiente relación en función de los movimientos en un entorno de dicho punto.

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.19)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

expresión en la que se observa que el tensor de Cauchy es un tensor simétrico.

Se puede ver también, que la estructura del tensor de deformaciones es totalmente análoga al tensor de tensiones por lo que realmente podemos asimilar a él todas las propiedades del tensor de tensiones, así existirán unas direcciones principales en las que las deformaciones tangenciales sean nulas, y por tanto el tensor de deformaciones en esas coordenadas pueda expresarse en la forma

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{111} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Aunque se demostrará en el apartado correspondiente, - podemos indicar ahora que las direcciones principales de los tensores de deformación y de tensiones coinciden (en material isótropo).

Asimismo podemos hablar, por tanto, de los invariantes de deformación que denominaremos de forma exactamente igual a los de tensiones pero con una ϵ como superíndice, es decir en la forma $J_1^\epsilon, J_2^\epsilon, J_3^\epsilon$.

También puede realizarse la descomposición del tensor en un tensor desviador y otro esférico u octaédrico.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^o + \epsilon_{ij}^d \quad (1.31)$$

donde ϵ_{ij}^o es un tensor diagonal cuyos elementos son iguales entre sí e iguales a

$$\frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3}, \quad \text{o lo que es igual a}$$

$$\frac{1}{3} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{3} \theta$$

donde θ es la divergencia del vector de movimientos e igual a la suma de las deformaciones de la diagonal principal.

Esta variable θ representa realmente el cambio de volumen por unidad de volumen, como veremos seguidamente. Sea un cubo de lado unidad de forma que después de deformado los lados tienen una longitud $(1 + \epsilon_x)$, $(1 + \epsilon_y)$, $(1 + \epsilon_z)$. El cambio de volumen vendrá dado por

$$\Delta V = (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z) - 1 =$$

$$= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$$

y despreciando los términos de orden superior pues consideramos deformaciones pequeñas

$$\Delta V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \text{ y } -\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{1} =$$

$$= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \theta \quad (1.32)$$

Se observa pues, que el cambio de volumen va asociado a la parte esférica del tensor deformación.

Muy frecuentemente, sin embargo, en plasticidad, las ecuaciones aparecen en función del incremento de deformación; o de la variación de ésta, más que en función de la propia deformación, siendo por tanto necesaria su definición.

Consideremos un pequeño intervalo de tiempo δt durante el cual un segmento lineal se somete a una deformación pequeña tal que los coeficientes del tensor de deformaciones finitas (Green o Almansi) son pequeños comparados con la unidad, mientras que los productos de las derivadas de los tensores pueden despreciarse frente a las propias derivadas. Entonces se denomina variación de deformación en la dirección definida por el vector de dirección μ a

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{\delta \epsilon^\mu}{\delta t} \right) = -\frac{d\epsilon^\mu}{dt} = \dot{\epsilon}^\mu \quad (1.33)$$

y derivando respecto al tiempo la expresión que liga a esa deformación con el tensor deformación, se tendría

$$\frac{d\epsilon^\mu}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \epsilon_{ij} \mu_j \mu_i \}$$

donde $\epsilon_{ij} \mu_j$ es el vector deformación en la línea considerada μ , y $(\epsilon_{ij} \mu_j) \mu_i$ es la componente longitudinal de ese vector es decir ϵ^μ .

$$\dot{\epsilon}^\mu = \dot{\epsilon}_{ij} \cdot \mu_j \mu_i$$

Va hemos dicho que la geometría no cambia apreciablemente y por tanto la variación de μ es nula.

Si ahora observamos la expresión infinitesimal de las deformaciones en función de los movimientos (tensor de Cauchy) tenemos

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 1/2 (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (1.34)$$

En este orden de cosas la variación de la deformación volumétrica será

$$\dot{\theta} = \frac{d}{dt} u_{i,i} = \frac{d}{dt} \text{div } u = \dot{u}_{i,i}$$

Hemos también de hacer notar que desde el momento que las velocidades son las derivadas totales de los desplazamientos con respecto al tiempo, en general

$$\dot{\epsilon}_{ij} \neq \frac{d}{dt} \epsilon_{ij}$$

Sin embargo para pequeñas deformaciones se puede llegar a que

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{ij}$$

Expresión que ni siquiera es cierta para el caso general de grandes deformaciones donde la variación de la geometría es apreciable, y los ejes principales de deformación no coinciden con los ejes principales del tensor variación de deformación.

1.8.- ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

Hemos visto que al ser los tensores simétricos tanto en lo que se refiere a los tensores de grandes deformaciones de Green y Almansi, como al tensor de Cauchy, introducen 6 cantidades cada uno, a través de solo tres datos reales que son los desplazamientos u_i . Entre los componentes ϵ_{ij} deben pues existir una serie de relaciones que garanticen la congruencia de las deformaciones en los diferentes puntos del sólido en el campo de movimientos del mismo.

Estas relaciones son conocidas como ecuaciones de compatibilidad, y son independientes de los movimientos puesto que resultan de su eliminación en las ecuaciones deformación-desplazamiento. Son seis, y se pueden poner en la forma siguiente.

$$-\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$-\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$-\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

(1.35)

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\text{Con } \gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$$

o en forma más compacta

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad (1.36)$$

Para comprobar que estas ecuaciones, efectivamente, se cumplen basta ponerlas en función de los desplazamientos, sustituyendo en ellas las expresiones de ϵ_{ij} y observar que las seis ecuaciones se convierten en identidades.

Las seis son independientes entre sí y no puede establecerse mayor número de ellas, pues al derivar por primera vez las relaciones deformación - desplazamiento, aparecen 18 ecuaciones y 18 parámetros, luego no es posible la eliminación. Sin embargo, al derivar por segunda vez quedan 36 ecuaciones y 30 parámetros quedando las 6 ecuaciones de compatibilidad, al eliminar los desplazamientos.

El significado físico de estas ecuaciones es simple, ya que significan exclusivamente que en los puntos de un dominio elástico no pueden producirse roturas o separaciones entre puntos infinitamente próximos, estableciéndose la "continuidad" de desplazamientos en el dominio en estudio.

1.9.- LEY DE COMPORTAMIENTO.

Siguiendo la idea de Hooke de hallar una relación lineal entre tensión y deformación en el campo elástico de comportamiento, Cauchy propuso que entre tensiones y deformaciones existe una ley lineal, en la forma

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.37)$$

donde C_{ijkl} es el tensor de las constantes elásticas o módulos del material que depende en general del punto de estudio, pero si el cuerpo es homogéneo, las C_{ijkl} son realmente constantes existiendo $9 \times 9 = 81$ de estas constantes.

En virtud de la simetría del tensor de tensiones las C_{ijkl} independientes son 54, ya que $C_{ijkl} = C_{jikl}$.

Pero $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$, de modo que si agrupamos los términos y descomponemos C_{ijkl} en la parte simétrica y antisimétrica respecto a los índices kl el producto de la segunda por el ϵ_{kl} simétrico es cero, con lo que $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ y el número de constantes se reduce a 36.

Este número de constantes todavía se puede reducir algo más si tenemos en cuenta la expresión de la energía elástica, que se define en el epígrafe siguiente en la forma

$$\xi = 1/2 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = 1/2 C_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij}$$

Como se puede suponer que ξ es simétrica, tenemos que $C_{ijkl} = C_{klij}$ con lo que el número de constantes se nos vuelve a reducir, en este caso es solo 21 siendo éste el máximo número de constantes que se necesitan para definir un cuerpo anisótropo, es decir, aquél que exhibe propiedades elásticas distintas según la dirección que se considere.

Para un cuerpo isótropo, sin embargo, la condición de independencia de comportamiento con la dirección, permite reducir aún más, el número de constantes necesarias para definirlo. Realizando una serie de cambios de ejes e identificando los resultados

se puede llegar a que un cuerpo isótropo queda definido solo - con dos constantes, denominadas constantes de Lamé, en la forma:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \theta + 2G \epsilon_x & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = 2G \epsilon_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2G \epsilon_y & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} = 2G \epsilon_{xz} \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2G \epsilon_z & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} = 2G \epsilon_{yz}\end{aligned}$$

donde $\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ es la deformación volumétrica.

En forma más compacta podemos expresar esta relación - como

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (1.38)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Podemos ahora sacar una serie de conclusiones importantes de esta ley. En principio se observa que las tensiones tangenciales no dependen en absoluto de las deformaciones longitudinales, es decir, ambos efectos se encuentran desacoplados. La consecuencia inmediata de esto es la demostración de la afirmación hecha anteriormente de que los ejes principales en tensiones y deformaciones coinciden, ya que si en un sistema de ejes las tensiones tangenciales son nulas (ejes principales), se deduce inmediatamente que las deformaciones tangenciales también son nulas.

Otra consecuencia es que los esfuerzos volumétricos - (asociados a la deformación volumétrica) están asociados exclusivamente al primer invariante de deformaciones. Efectivamente sumando las tres primeras ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned}J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\theta + 2G(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \\ &= (3\lambda + 2G) \theta\end{aligned}$$

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2G} J_1 \quad (1.39)$$

En la mayoría de las ocasiones suele sin embargo relacionarse a θ con la tensión media σ_{oct} en vez de con el primer invariante. Como $\sigma_{oct} = J_1/3$ se tiene que

$$\theta = \frac{3}{3\lambda + 2G} \sigma_{oct} = \frac{1}{K} \sigma_{oct} \quad (1.40)$$

siendo K el módulo de compresibilidad.

La inversión de las fórmulas anteriores se realiza de forma inmediata por lo que respecta a las tres últimas quedando

$$\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy} = -\frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = 2 \epsilon_{xz} = -\frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = 2 \epsilon_{yz} = -\frac{1}{G} \tau_{yz}$$

En cuanto a las tres primeras, tomando una de ellas

$$2G \epsilon_x = \sigma_x - \lambda \theta$$

$$\epsilon_x = -\frac{1}{2G} \sigma_x - \frac{\lambda}{2G} \frac{J_1}{3\lambda + 2G} = -\frac{1}{2G} \sigma_x - \frac{\lambda}{2G} \frac{1}{3\lambda + 2G} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\epsilon_x = -\frac{1}{2G} \left\{ \sigma_x \left(1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \right) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} (\sigma_y + \sigma_z) \right\}$$

$$\epsilon_x = -\frac{1}{2G} \left\{ -\frac{2(\lambda + G)}{3\lambda + 2G} \sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} (\sigma_y + \sigma_z) \right\}$$

y análogamente para los demás.

Estas expresiones pueden ponerse en una forma más usual recordando que la ley de Hooke en el ensayo monodimensional es

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x,$$

donde E es el módulo de elasticidad del material. Identificando - se tiene

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + G}{G (3 \lambda + 2G)} \quad (1.41)$$

Por otro lado sabemos también que en el ensayo se producen acortamientos transversales $\epsilon_y = - \nu/E \sigma_x$ donde ν es el coeficiente de Poisson

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\lambda E}{2G (3 \lambda + 2G)} = \frac{\lambda}{2G (3 \lambda + 2G)} \frac{G (3 \lambda + 2G)}{\lambda + G} = \\ &= \frac{\lambda}{2 (\lambda + G)} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Con esta notación la ley de Hooke para el caso de deformaciones queda en la forma

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Despejando ahora λ y G en función de E y ν queda

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2 (1 + \nu)} \\ \lambda &= \frac{E \nu}{(1 + \nu) (1 - 2 \nu)} \end{aligned}$$

y en la misma forma

$$K = \frac{E}{1 - 2 \nu}$$

1.10.- ENERGIA ELASTICA Y ENERGIAS ELASTICAS DESVIADORA Y ESFERICA

Por definición se llama energía elástica a

$$\xi = 1/2 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (1.46)$$

y en función de las tensiones y deformaciones principales, sabiendo que los ejes principales de uno y otro tensor coinciden, es decir que en ese sistema de referencia principal los tensores tensión y deformación son

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_{11} & \\ & & \sigma_{111} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \epsilon_{11} & \\ & & \epsilon_{111} \end{bmatrix}$$

queda

$$\xi = 1/2 (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{111} \epsilon_{111})$$

Aplicando ahora la ley de Hooke generalizada donde

$$\epsilon_i = 1/E \{ \sigma_i - \nu (\sigma_j + \sigma_k) \} \quad \text{se tiene que}$$

$$\sigma_i \epsilon_i = 1/E \{ \sigma_i^2 - \nu (\sigma_i \sigma_j + \sigma_i \sigma_k) \} \quad \text{y por tanto}$$

$$\xi = 1/2E \{ \sigma_1^2 + \sigma_{11}^2 + \sigma_{111}^2 - 2 \nu (\sigma_1 \sigma_{11} + \sigma_1 \sigma_{111} + \sigma_{11} \sigma_{111}) \}$$

y si ahora la disponemos en función de los invariantes tenemos que

$$\xi = 1/2E \{ (\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111})^2 - 2(1+\nu) (\sigma_1 \sigma_{11} + \sigma_1 \sigma_{111} + \sigma_{11} \sigma_{111}) \}$$

e identificando con los invariantes

$$\xi = 1/2E \{ J_1^2 + 2(1 + \nu) J_2 \} \quad (1.47)$$

Así por ejemplo en el ensayo de tracción $J_1 = \sigma_{trac}$ y $J_2 = 0$ con lo que

$$\xi_{trac} = 1/2E \sigma_{trac}^2 = 1/2 \sigma_t \epsilon_t \quad (1.48)$$

Pero del mismo modo que se puede definir la energía elástica general, podemos definir también las energías debidas a los tensores esférico y desviador.

Si aplicamos la expresión anterior a la componente esférica del tensor tenemos

$$\xi^{oct} = 1/2 \sigma^{oct} \epsilon^{oct} = 3/2 \sigma^{oct} \theta/3$$

Pero se vió antes que $\epsilon_1 + \epsilon_{11} + \epsilon_{111} = \theta = K \sigma^{oct}$ con lo que

$$\xi^{oct} = 3/2 \sigma^{oct} \frac{K \sigma^{oct}}{3} = 1/2 K \sigma^{oct2} =$$

$$= 1/2 \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma^{oct2} \text{ y en función de } -$$

los invariantes

$$\xi^{oct} = -\frac{1}{6E} (1 - 2\nu) J_1^2 \quad (1.49)$$

que representa la energía almacenada durante el cambio de volumen.

Estudiando del mismo modo la energía del desviador se tiene

$$\begin{aligned} \xi^d &= 1/2 \sigma'_{ij} \epsilon'_{ij} = 1/2 \{ (\sigma_1 - \sigma^{oct}) (\epsilon_1 - \epsilon^{oct}) + \\ &+ (\sigma_{11} + \sigma^{oct}) (\epsilon_{11} - \epsilon^{oct}) + (\sigma_{111} - \sigma^{oct}) (\epsilon_{111} - \epsilon^{oct}) \} = \\ &= 1/2 \{ \sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{111} \epsilon_{111} - \sigma^{oct} (\epsilon_1 + \epsilon_{11} + \epsilon_{111}) - \end{aligned}$$

$$- (\sigma_1 + \sigma_{11} + \sigma_{111}) \epsilon_{oct} + 3 \sigma_{oct} \epsilon_{oct} \} =$$

$$= \xi - 3/2 \sigma_{oct} \epsilon_{oct} = \xi - \xi^{oct} =$$

$$= -\frac{1}{2E} \{ J_1^2 + 2 (1 + \nu) J_2 - \frac{1}{3} - \frac{2\nu}{3} J_1^2 \} =$$

$$= -\frac{2(1+\nu)}{2E} \{ 1/3 J_1^2 + J_2 \} = -\frac{1}{2G} \tau_{oct}^2 = -\frac{1}{2G} J_2'$$

En definitiva

$$\xi^d = -\frac{1}{2G} \{ -\frac{1}{3} J_1^2 + J_2 \} = -\frac{1}{2G} J_2' \quad (1.50)$$

1.11.- ECUACIONES DE NAVIER Y BELTRAMI

Para la resolución del problema elástico, utilizando todas las expresiones anteriores, una elección inmediata sería plantear el problema en función de los movimientos u_i . Las ecuaciones de compatibilidad se cumplirán automáticamente y solo habría que ajustar las condiciones de equilibrio en el interior y en el contorno. Desde un punto de vista matemático, se trata de escribir las ecuaciones de equilibrio $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$ en función de los movimientos, a través de la ley de comportamiento:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij}$$

con lo que

$$\sigma_{ij,j} = \lambda \theta_{,j} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij,j}$$

y

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})$$

con lo que

$$\epsilon_{ij,j} = 1/2 (u_{i,jj} + u_{i,ij})$$

y

$$\theta_{,j} = u_{i,ij}$$

Con ello la ecuación de equilibrio quedaría

$$\lambda u_{i,ij} \delta_{ij} + 2G 1/2 (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + X_i = 0$$

$$\lambda u_{i,jj} + G (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + X_i = 0$$

$$(\lambda + G) u_{i,jj} + G u_{j,ij} + X_i = 0 \quad (1.51)$$

que es la denominada ecuación de Navier y que realmente corresponde a la ecuación de equilibrio en movimientos.

Si la escribimos, como es usual en forma vectorial, quedaría.

$$G \nabla^2 \underline{u} + (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) + \underline{X} = 0 \quad (1.52)$$

Otra forma alternativa interesante de esta expresión se obtiene a partir de la igualdad

$$\nabla \wedge \nabla \wedge u = \nabla (\nabla \cdot u) - \nabla^2 u$$

Sustituyendo $\nabla^2 u$ en la ecuación de Navier queda

$$(\lambda + 2G) \nabla (\nabla \cdot u) - G (\nabla \wedge \nabla \wedge u) + \underline{x} = 0 \quad (1.53)$$

expresión muy usada, porque en los casos en que $\nabla \wedge u$ se anula, - por ejemplo en los casos en que exista simetría axial, las ecuaciones se simplifican considerablemente.

La integración de las ecuaciones de Navier hace aparecer unas constantes que se determinan ajustando las ecuaciones de equilibrio en el contorno.

En la práctica, numerosas veces se necesita solamente el conocimiento del estado de tensiones del cuerpo, y por ello una alternativa del procedimiento anterior consiste en plantear el problema en tensiones $\sigma_{ij}(x, y, z)$. Las σ_{ij} deben cumplir las ecuaciones de equilibrio, pero, además, las deformaciones obtenidas de ellas a través de la ley de comportamiento están obligadas por las ecuaciones de compatibilidad. Para simplificar el procedimiento es interesante escribir estas últimas en función de la σ_{ij} .

De $\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0$ y a través de

$$\epsilon_{ij} = -\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} J_1 \delta_{ij} \text{ se puede llegar a}$$

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} J_{1,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} x_{k,k} - (x_{i,j} + x_{j,i}) \quad (1.57)$$

que se denominan ecuaciones de Beltrami - Michell, que permiten calibrar si el campo de tensiones que está sometido un cuerpo elástico puede efectivamente ser solución de un problema elástico, al cumplirse las ecuaciones de compatibilidad.

2.- CRITERIOS DE PLASTIFICACION

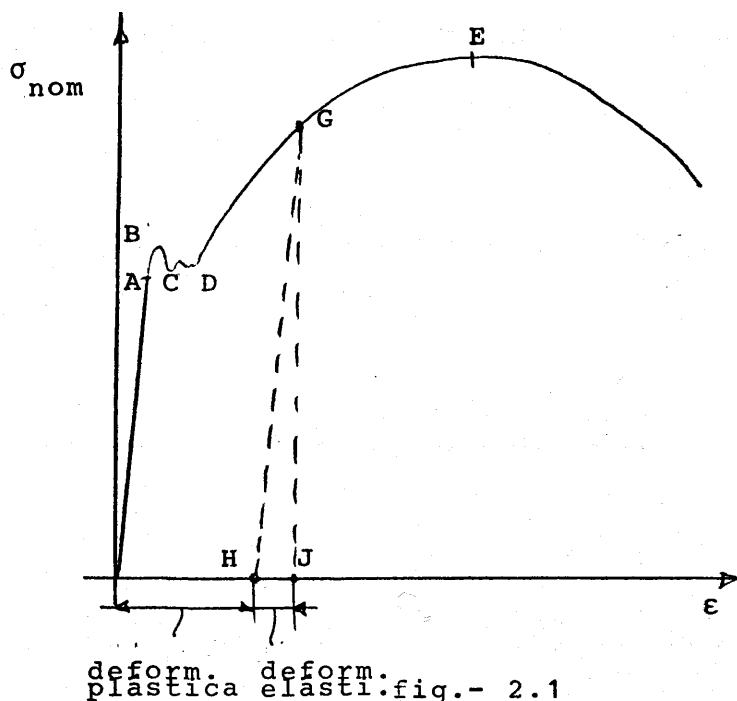
2.1.- EL ENSAYO DE TRACCION

El ensayo mecánico más común es el ensayo de tracción uniaxial para determinar la relación tensión-deformación del material. La probeta del material a ensayar, de forma determinada, se somete a una fuerza de tracción a lo largo del eje hasta que ocurre la fractura.

Quizá la explicación de su popularidad, además del coste y facilidad de realización, radique en motivos históricos. Ya Hooke en 1760, tras experimentar con muelles para reloj, formuló la conocida ley entre tensión y deformación, todavía de utilidad para piezas prismáticas.

Consideremos una barra de acero sujeta a una fuerza F que provoca tensión de tracción, en una máquina de ensayo a la temperatura ambiente, y una velocidad de deformación menor que 10^{-3} por segundo por lo que puede considerarse un ensayo cuasi-estático. Midiendo los incrementos de longitud de una longitud inicial conocida, puede conocerse la deformación de la probeta $\epsilon = \Delta L / L_0$ donde L_0 es la longitud inicial. Si representamos esta deformación frente a la tensión nominal, definida en la forma $\sigma_{nom} = F / A_0$ donde A_0 es la sección inicial de la probeta, el resultado es una curva tal como indica la figura 2.1

La porción de la curva OA indica que la relación entre la tensión y la deformación es esencialmente lineal y el punto A define el límite de proporcionalidad. Durante esta deformación el material está sujeto exclusivamente a deformación elástica. Con tensiones superiores la relación se hace no-lineal aunque el material permanece elástico, por lo que si se descarga vuelve a recobrar su longitud inicial. El punto B final del comportamiento elástico es conocido como límite elástico superior y la tensión correspondiente, tensión superior de límite elástico. En la



mayoría de las aplicaciones los puntos A y B son tan próximos - que se consideran el mismo, tomándose así para la mayoría de las aplicaciones ingenieriles.

Deformaciones superiores hacen que baje algo la tensión, y se produce en la zona BCD un incremento alto de deformación con una tensión prácticamente constante. Esta tensión nominal se denomina "límite inferior". La porción de curva CD representa un promedio de una serie de saltos inestables entre los límites superior e inferior, causados por la propagación de las bandas Lüders a través del material. El límite superior es muy sensible a pequeñas flexiones, defectos del material, etc, por lo que el límite elástico que se utiliza en los cálculos habituales es el inferior.

Si continua la deformación, correspondiente a la parte de la curva DE se incrementa de nuevo la tensión necesaria para producir esa deformación, considerando incluso que la sección transversal de la probeta disminuye, por lo que la tensión real aumentaría, aunque la tensión nominal permaneciese constante. Este efecto se denomina rigidización por deformación. Sin embar-

go, la pendiente de la curva DE disminuye mostrando que la rigidez va haciéndose menor que la disminución de la sección. Así en el punto E existe un máximo de la tensión nominal σ_{\max} produciéndose un cuello en la estricción y una rápida deformación con incremento de la fuerza exterior hasta que en F la deformación es suficiente para producir la rotura.

Si la deformación del material es importante, (punto G) y se produce la descarga completa se obtiene una línea recta GH paralela a la de carga elástica OA, es decir con pendiente igual al módulo elástico E. Después de la descarga existe aún una deformación irreuperable OH que representa una deformación plástica, mientras que el resto de la deformación HJ se ha recuperado en la descarga indicando que era realmente una deformación elástica.

Al volver a cargar según la línea HG se sigue con una pequeña desviación que produce un bucle de histeresis (fig.2.2)

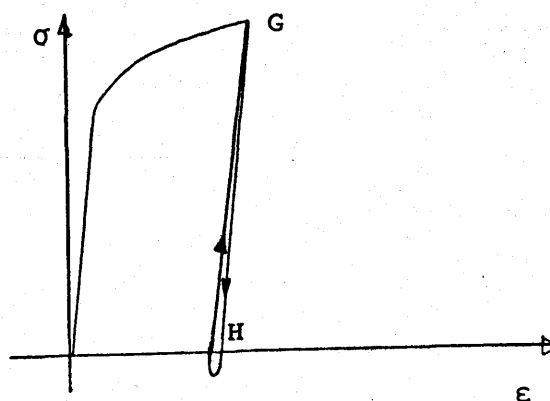


fig.- 2.2

Una nueva plastificación no se produce hasta que se alcanza el punto G, siguiendo de nuevo la curva.

A todos los efectos sería como si el material hubiese aumentado su límite de elasticidad por efecto del estado previo. Este fenómeno se suele llamar endurecimiento por deformación o acritud.

Una característica muy importante del ensayo de tracción es que la variación de volumen es prácticamente nula, es decir $\Delta V \approx 0$, con lo que $\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \approx 0$, diciéndose en este caso que el material es incompresible.

Si después de descargado el material hasta el punto H aumentamos la tensión en sentido inverso, sería presumible que la plastificación comenzase al alcanzar una tensión negativa igual a la tensión del punto G, sin embargo la evidencia experimental demuestra que ello ocurre mucho antes. Este efecto se denomina habitualmente efecto Bauschinger y es debido al mantenimiento de unas tensiones residuales a escala microscópica. Otros autores sin embargo atribuyen el efecto Bauschinger a la anisotropía de las dislocaciones producidas. Ambos efectos probablemente vayan unidos siendo posible eliminarlos mediante un proceso térmico adecuado.

Siguiendo la curva tensión-deformación se observa que la curva sube hasta el punto E donde la tensión alcanza un máximo a partir del cual, las deformaciones crecen aunque disminuye la carga. El motivo estriba en una súbita reducción de la sección transversal en una zona de la barra que conduce a la formación de un cuello de estricción en el que se acaba produciendo la rotura.

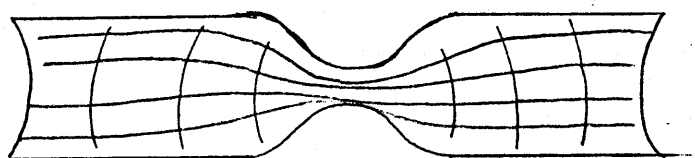


fig.- 2.3

La formación de este cuello (fig2.3) es consecuencia - de un fenómeno de inestabilidad que podemos estudiar. Recordando que el cambio de volumen en el ensayo de tracción es despreciable tendremos

$$SL = S (L_o + \Delta L) = S_o L_o = \text{Cte.}$$

Si estudiamos como afecta a esta expresión una variación del alargamiento $d\epsilon$

$$(L_o + \Delta L) \frac{dS}{d\epsilon} + S \frac{d(\Delta L)}{d\epsilon} = 0$$

$$\frac{dS}{d\epsilon} = - \frac{S}{L_o + \Delta L} \frac{d(\Delta L)}{d\epsilon} \text{ pero } \epsilon = \frac{\Delta L}{L_o}, \text{ luego}$$

$$d\epsilon = \frac{d(\Delta L)}{L_o} \quad \frac{d\epsilon}{d(\Delta L)} = \frac{1}{L_o}$$

La variación de la sección con el alargamiento es pues

$$\frac{dS}{d\epsilon} = - \frac{SL_o}{L_o + \Delta L} = - \frac{S}{1 + \epsilon}$$

Para ver como varia la carga usamos $F = S\sigma$ y

$$\frac{dF}{d\epsilon} = S \frac{d\sigma}{d\epsilon} + \sigma \frac{dS}{d\epsilon} = S \left(\frac{d\sigma}{d\epsilon} - \frac{\sigma}{1 + \epsilon} \right)$$

Si $\frac{d\sigma}{d\epsilon} > \frac{\sigma}{1 + \epsilon}$ todo incremento de ϵ está provocado por el correspondiente aumento de F . La situación es estable.

Si $\frac{d\sigma}{d\epsilon} < \frac{\sigma}{1 + \epsilon}$ puede producirse un incremento de ϵ aunque disminuya F . La situación es inestable.

A la luz de ello se comprende que en el caso inestable la presencia, por ejemplo, de un defecto local en una cierta sección hace que ésta disminuya sin que las vecinas puedan remediarlo y se provocará el cuello de estricción al que hemos hecho mención.

En un diagrama $(F/S, \epsilon)$, $d\sigma/d\epsilon$ es la pendiente de la curva y ello permite delimitar con una sencilla construcción geométrica el punto en el que aparece la estricción. Bastará obligar a que la subtangente valga $1 + \epsilon$. Asimismo OB representa el valor de la tensión σ a la que se presenta aquella. (Fig2.4).

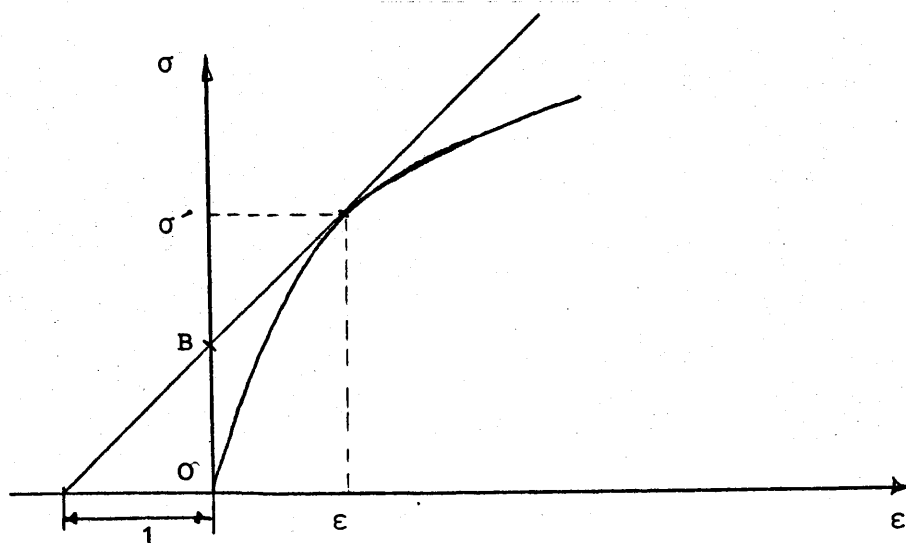


fig.- 2.4

Efectivamente

$$\frac{\frac{OB}{1}}{1} = \frac{\sigma'}{1 + \epsilon} = \frac{I}{S (1 + \epsilon)} = \frac{I}{\frac{S}{L_0} (L_0 + \Delta L)} = \frac{I}{S_0} \text{ ya que}$$

$$\frac{S}{L_0} = \frac{S_0}{L}$$

Como se observa, la definición de la deformación es muy importante al construir el diagrama. Así como la tensión puede definirse como F/S ó F/S_0 , suele también definirse la deformación como $\epsilon = \Delta L/L_0$ ó $\epsilon = \Delta L/L$

En este caso

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L_0 + \Delta L} = \frac{\Delta L}{L_0} \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right)^{-1} = \epsilon_{\text{nom}} \left(1 - \frac{\Delta L}{L_0} + \dots\right)$$

Por último suele también utilizarse la denominada deformación natural definida por Hencky en la forma

$$\epsilon^H = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \quad \text{porque}$$

$$\text{a.- Son aditivas} \quad \epsilon^H = \ln \frac{l_2}{l_0} = \ln \frac{l_2}{l_1} + \ln \frac{l_1}{l_0} =$$

$$= \ln \frac{l_2}{l_1} + \ln \frac{l_1}{l_0} = \epsilon_2^H + \epsilon_1^H$$

b.- Una comparación de curvas tensión-deformación puede realizarse para diferentes sistemas de tensión (tracción, torsión, etc).

c.- La relación de constancia de volumen se escribe

$$\epsilon_1^H + \epsilon_2^H + \epsilon_3^H = 0$$

Para terminar, la temperatura a la que se produce el test también es muy importante, variando ostensiblemente los puntos de definición de la curva tensión-deformación con aquella. Sin embargo un estudio profundo escapa de los límites de estas notas, remitiendo al lector interesado a Phillips [].

Este efecto de la temperatura, en ocasiones es tan importante que el incremento de ésta debido exclusivamente a la disipación de energía producido durante la plastificación, puede ser en algunas ocasiones suficiente para alcanzar la temperatura de recristalización a altas temperaturas y altas velocidades de deformación, produciéndose el efecto denominado reblandecimiento por deformación, que consiste en un aumento de la deformación importante mientras la tensión necesaria para producirlo va decreciendo.

2.2.- EL CUERPO PLASTICO IDEAL

Como se ha visto, los metales obedecen la ley de Hooke de elasticidad lineal solo en un cierto rango para deformaciones muy pequeñas. Cuando un material se deforma por encima del límite elástico la ley de Hooke no tiene aplicación. El comportamiento de los metales a partir de ese momento es muy complicado, y depende de las características del metal. El modelo más fácil corresponde al de un modelo plástico ideal entendiendo como aquél el correspondiente a un material que no se deforma antes de un determinado umbral de tensión y a partir de ese instante se produce una deformación plástica irrecuperable hasta la rotura a una tensión constante. (Fig2.5)

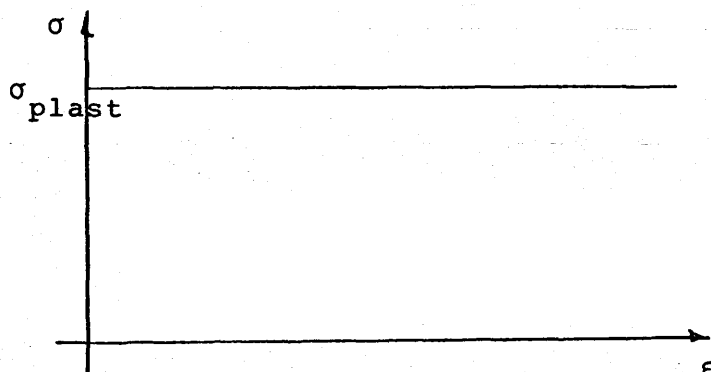


fig.- 2.5

No es este el modelo más apropiado a la realidad y por ello presentaremos en este momento los ingredientes mínimos necesarios para constituir una teoría de plasticidad, basandonos en lo expuesto en el epígrafe 1.2. Allí se supone que la relación entre la tensión y variación de la deformación es del tipo

$$\sigma'_{ij} = -\frac{k}{\sqrt{J_2 \dot{\epsilon}}} \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

donde σ'_{ij} es el tensor desviador de tensiones, $J_2^{\dot{\epsilon}}$ es el segundo invariante del tensor de variaciones de deformación y $\dot{\epsilon}_{ij}$ es el tensor de variaciones de deformación. Se admite también que las deformaciones elásticas son despreciables frente a las plásticas y la incompresibilidad del material.

Si multiplicamos la ley de flujo por sí misma, se obtiene el criterio de plastificación de Levy-Mises, es decir la relación de tensiones a partir de la cual se produce la plastificación.

$$\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{k^2}{J_2^{\dot{\epsilon}}} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 2 k^2$$

$$J_2' = k^2$$

que es la ley de plastificación de Von-Mises

Para calcular la constante k estudiaremos un caso particular que es el ensayo de tracción. En este caso sabemos que la plastificación se produce al alcanzarse el límite elástico Y .

$$\sigma_I = Y \quad \sigma_{II} = 0 \quad \sigma_{III} = 0$$

$$\sigma_{oct} = Y/3 \quad \sigma_I' = 2/3 Y \quad \sigma_{II}' = -Y/3 \quad \sigma_{III}' = -Y/3$$

luego $J_2' = 1/3 Y^2 = k^2$ $k = 1/\sqrt{3} Y$ y el criterio total de Levy - Mises sería

$$J_2' = 1/\sqrt{3} Y$$

Otro ensayo interesante correspondería a un ensayo de tensión tangencial pura.

$$\sigma_I = -\sigma_{II} = \bar{\tau} \quad \sigma_{III} = 0$$

$$\sigma_{oct} = 0 \quad \sigma'_I = \sigma_I = -\sigma'_{II} = -\sigma_{II} = \bar{\tau}$$

$$J'_2 = \bar{\tau}^2 = k^2 \quad k = \bar{\tau}$$

y el criterio de Von Mises también puede expresarse como

$$\sqrt{J'_2} = \bar{\tau}$$

siendo $\bar{\tau}$ la tensión tangencial a partir de la cual se produce la plastificación y que es igual a $1/\sqrt{3}$ y.

Se puede observar también que este criterio corresponde a un material plástico ideal ya que las deformaciones quedan indeterminadas para cualquier estado de tensiones. Efectivamente, al incrementarse $\dot{\epsilon}_{ij}$ se aumenta en la misma proporción $\sqrt{J'_2}$.

Una cierta variación del flujo de Von-Mises supone la adición de las deformaciones elásticas, constituyendo lo que se denomina teoría de Prandtl-Reuss.

En este caso se supone $\dot{\epsilon}_{ij}^p = d\lambda \sigma'_{ij}$. Es decir la variación de deformación plástica es proporcional a las tensiones desviadoras.

Multiplicando la ley de flujo por sí misma se obtiene de nuevo el criterio de Von-Mises pero algo modificado.

$$\sigma'_{ij} = \frac{k}{\sqrt{J'_2}} \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

$$\sqrt{J'_2} = k$$

En este caso pues estamos en presencia de una teoría - elastoplástica con un modelo en la forma que presenta la fig2.6.

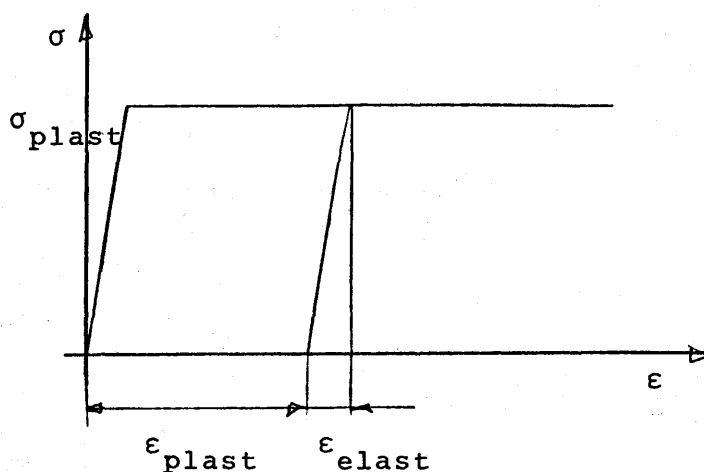


fig. 2.6

Se observa que en ambas teorías de plasticidad se necesita el criterio de plastificación, o combinación de tensiones - a partir de la cual comienza la plastificación, y una ley que - ligue las variaciones de deformación con las tensiones.

Por último, un modelo también importante supone que el material no se deforma hasta una determinada tensión, y a partir de ahí el material fluye de forma que la variación con respecto al tiempo de la deformación es proporcional a las tensiones tangenciales a partir de ese umbral. Es la que se denomina teoría de Hohenemser y Prager, que es realmente una generalización de la teoría de Bingham que se expresa en la forma siguiente

$$2\eta \dot{\epsilon}_{xy} = (|\tau_{xy}| - k) \frac{\tau_{xy}}{|\tau_{xy}|} = (1 - \frac{k}{|\tau_{xy}|}) \tau_{xy}$$

Cuando el interior del paréntesis es negativo no habría velocidad de deformación pues no existiría ésta, por lo que sería cero ($k = |\tau_{xy}|$ antes del umbral).

La teoría de Hohenemser - Prager varía en la forma de sustituir $|\tau_{xy}|$ por $\sqrt{J_2}$ y τ_{xy} por σ'_{ij} . Así tendremos

$$2\eta \dot{\epsilon}_{ij} = \left\langle 1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}} \right\rangle \sigma'_{ij}$$

donde $\langle \rangle$ significa que solo puede tomar valores mayores ó iguales que cero.

Multiplicando la ecuación por sí misma y por 1/2 queda

$$\begin{aligned} 4\eta^2 J_2 \dot{\epsilon} &= \left\langle 1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}} \right\rangle^2 J_2 = \\ &= \left\langle 1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}} \right\rangle^2 \frac{k^2}{\left[1 - \left\langle 1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}} \right\rangle \right]^2} \end{aligned}$$

Por tanto

$$4\eta^2 J_2 \dot{\epsilon} = \left(\frac{\left\langle 1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}} \right\rangle k}{1 - \left\langle 1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}} \right\rangle} \right)^2 \quad \text{y despejando } \langle \rangle$$

se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle 1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}} \right\rangle &= 2\eta \frac{\sqrt{J_2 \dot{\epsilon}}}{k + 2\eta \sqrt{J_2 \dot{\epsilon}}} \quad \text{y sustituyendo en la expresión inicial se tiene} \\ 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} &= 2\eta \frac{\sqrt{J_2 \dot{\epsilon}}}{k + 2\eta \sqrt{J_2 \dot{\epsilon}}} \sigma'_{ij} \end{aligned}$$

$$\sigma'_{ij} = (2\eta + \frac{k}{\sqrt{J_2}}) \dot{\epsilon}_{ij}$$

Todas estas teorías dan una idea de la matemática de la plasticidad, destacando en todas ellas la definición del criterio de plastificación que se estudia en este capítulo.

2.3.- EL CRITERIO DE PLASTIFICACION. CONSIDERACIONES GENERALES

Al estudiar la tracción o compresión pura de metales dúctiles se encuentra que, en cualquier situación de la historia del material, este tiene una zona de comportamiento elástico y otra de comportamiento elastoplástico definidas como

$0 < \sigma < \sigma_y$ el material es elástico, donde σ_y es la tensión de "límite elástico", variable con el estado de deformaciones plásticas del material (σ_1 para un estado A y σ_2 para el punto B) (fig2.7).

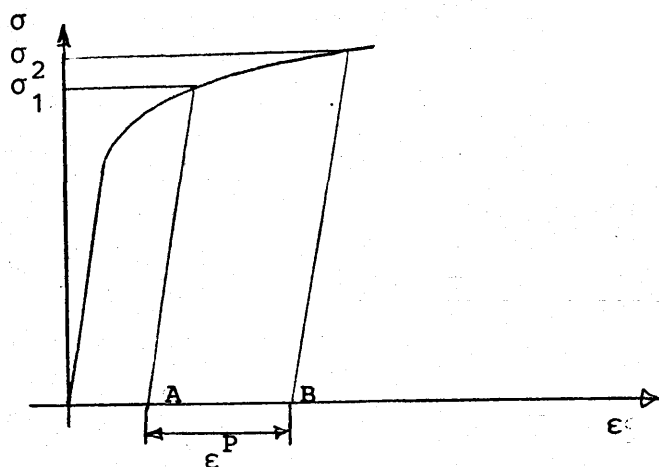


fig.- 2.7

Si se olvida el efecto Bauschinger y se extiende el rango elástico

$$-\sigma_y < \sigma < \sigma_y \quad (2.1)$$

Se observa que la zona elástica queda definida en términos de límites de tensión, funciones, a su vez, del estado de deformaciones plásticas del material.

Consideremos en primera instancia un ensayo bidimensional, de forma que variando σ_1 y σ_2 (vease fig2.8a) pueden con-

seguirse distintos puntos de tensión límite que separan la zona elástica de la zona plástica para un material con deformación plástica nula. El conjunto de todos estos puntos forma una curva denominada "curva de plastificación" y estará definida por una ecuación denominada "criterio de plastificación". Esta curva divide el espacio de tensiones en una serie de zonas: un punto como el A (fig.2.8b) interior a la curva se encontrará en régimen

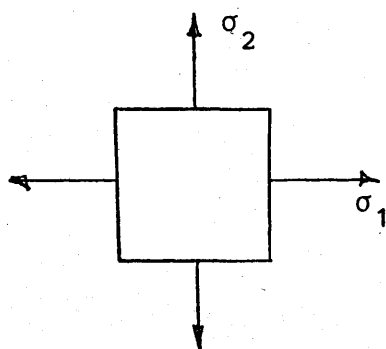


fig.- 2.8.a

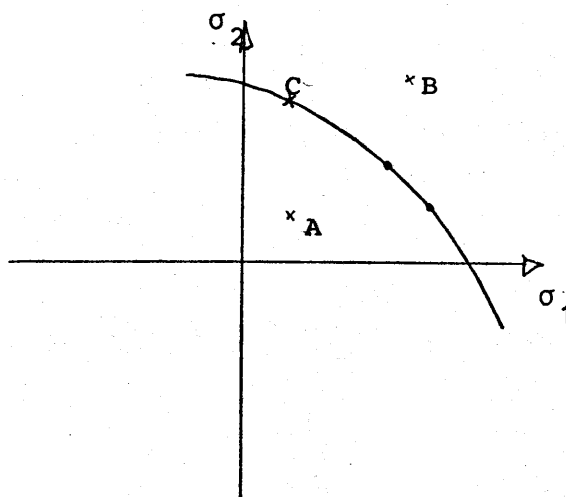


fig.- 2.8.b

elástico, un punto como el B representa un estado imposible, y un punto C sobre la curva se encuentra en estado plástico.

La curva ha sido obtenida, para un material "virgen", (vg: punto A de la fig2.7) es decir con deformaciones plásticas nulas, sin embargo si realizamos el mismo test para materiales con una deformación plástica dada ϵ^p (vg: punto B de la fig.2.7) obtendremos otra curva similar a la anterior y algo mayor ("rigidización por deformación"), teniéndose en definitiva en el espacio $\sigma_1 \sigma_2 \epsilon^p$ una superficie tal como la indicada en la fig2.9.

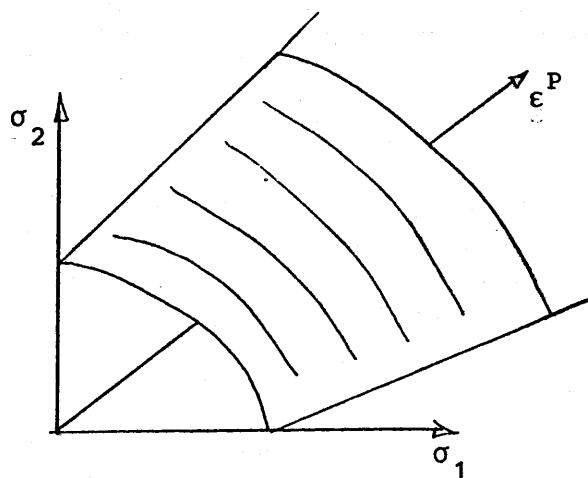


fig.- 2.9

En esa forma si el punto representativo del espacio de tensiones (σ_1 σ_2) llega a la curva correspondiente a la deformación plástica a la que estaba sometido, comienza a aumentar ésta pasando el punto representativo a curvas siguientes, de forma - que siempre se encontrará en la superficie anteriormente definido, por lo que ésta superficie separa estados elásticos (inter_{nos} a ella), de estados imposibles (externos a ella), mientras_ que cualquier estado elastoplástico tiene su punto representati_{vo} en dicha superficie.

Naturalmente si fuera posible duplicar experimentalmen_{te} y de forma exacta el estado de tensiones requerido en un mate_{rial} y observar el comportamiento plástico, el criterio anterior sería innecesario. Pero esto no es posible para estados de ten_{sión} complejos por lo que se intenta predecir esa separación en_{tre} zonas elásticas y plásticas en función de resultados experi_{mentales} sencillos como el de tracción.

Los métodos de predicción o "criterios de plastifica_{ción}" son uno de los pilares básicos de las teorías de plastici_{dad} y a ellos se dedica este capítulo.

Como se ha indicado anteriormente, un criterio es una ley que define los límites del comportamiento elástico en un material sometido a una combinación de tensiones y unas deformaciones plásticas definidas. Esto se escribe matemáticamente.

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = 0 \quad (2.2)$$

Sin embargo, y en general, se prefiere estudiar un material con deformación plástica nula y a continuación se realiza el análisis de la ley de rigidización. Este último estudio se hará en el capítulo 4, limitandonos aquí a la definición de criterios en el plano $\epsilon_{ij}^p = 0$, con lo que la expresión es solo función del estado de tensiones,

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.3)$$

Cuando $f(\sigma_{ij}) < 0$ el material se encuentra en estado elástico y $f(\sigma_{ij}) > 0$ representa estados imposibles.

Esta ecuación puede imaginarse como una hipersuperficie en el espacio 9-dimensional de tensiones, y teniendo en cuenta la simetría del tensor σ_{ij} , en el espacio 6-dimensional. Si se representa en el espacio de tensiones principales, en general esa función dependerá también de 6 constantes: los módulos de las tensiones principales y 3 de los cosenos directores que definen las direcciones principales.

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, v_I, v_{II}, v_{III}) = 0 \quad (2.4)$$

Si el material es isótropo f no depende de la dirección de las tensiones en el material, y concretamente de las direcciones principales, con lo que

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = 0 \quad (2.5)$$

facilmente representable en el espacio de tensiones principales.

También es usual dar esta función a través de los invariantes de tensiones J_1, J_2, J_3 definidos en 1.4.

Aun se puede reducir más esta expresión si tenemos en cuenta los resultados experimentales de Bridgman y otros: metales sujetos a presiones hidrostáticas ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = \sigma_{oct}$) no alcanzan la plastificación hasta que σ_{oct} toma un valor desmesuradamente alto, por lo que para las tensiones usuales de trabajo de los metales, la componente octaédrica del tensor tensión debe suprimirse de f y ésta puede ponerse en función de los invariantes del tensor desviador J'_1, J'_2, J'_3 ; recordando que $J'_1 = 0$ el criterio queda.

$$f(J'_2, J'_3) = 0 \quad (2.6)$$

con

$$J'_2 = -(\sigma'_1 \sigma'_2 + \sigma'_2 \sigma'_3 + \sigma'_3 \sigma'_1) = \{\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2\} / 2$$

$$J'_3 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 = \{\sigma_1'^3 + \sigma_2'^3 + \sigma_3'^3\} / 3$$

En términos geométricos puede decirse que el dominio elástico acaba allí donde el vector desviador alcanza una cierta magnitud, independientemente del valor del vector esférico, es decir de la componente principal. La sección de la superficie según planos perpendiculares a la diagonal principal ha de ser igual para todos ellos, pudiendo estudiarse uno solo, en general el llamado plano Π que pasa por el origen.

Aunque, como se ha indicado, la superficie de plastificación es independiente de la presión hidrostática, la rotura se produce cuando ésta es suficientemente alta, por lo que en algún punto la superficie de rotura se encuentra cortando a la de plastificación como indica la (fig 2.10). En estos casos si se alcanza la superficie de rotura antes que la de fluencia se produce -

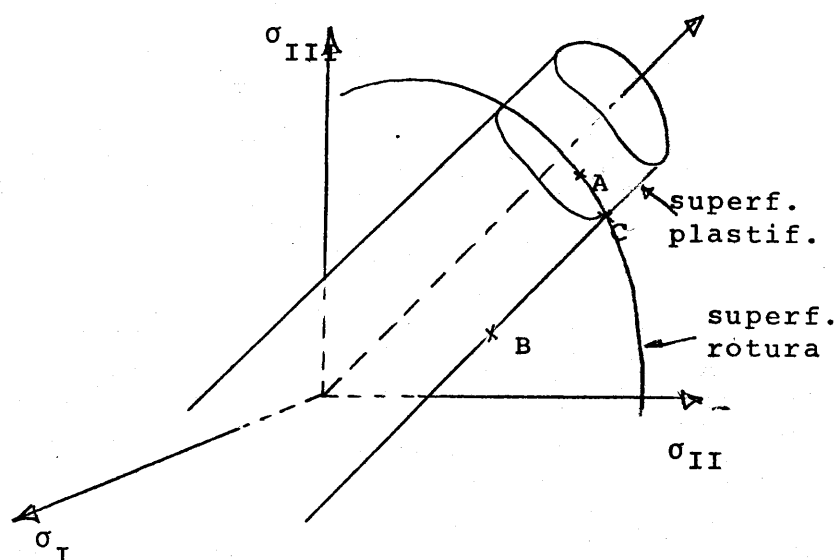


fig.- 2.10

una rotura frágil, por ejemplo en el punto A. Sin embargo si se alcanza antes la plastificación en B y se sigue aumentando la tensión se produce una rotura dúctil en C. (Debe recordarse sin embargo, que al producirse deformación plástica aumenta el tamaño de la superficie de plastificación de forma que los puntos entre B y C se encuentran en sucesivas superficies)

Una última restricción se puede imponer desde el punto de vista de que el efecto Bauschinger es despreciable, para materiales vírgenes, para los que se define el criterio de plastificación, con lo cual si un punto tal como el $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ pertenece a la curva de plastificación también lo hace $(-\sigma_I, \sigma_{II}, -\sigma_{III})$, y si el material es isótropo también pertenecerá el $(\sigma_{III}, \sigma_{II}, \sigma_I)$ y el resto de combinaciones de lo que se deduce la simetría de la superficie respecto a las tensiones principales, observándose en la representación de Haig-Westergaard que las curvas han de ser idénticas cada 60° .

Por otro lado como f ha de ser igual para tensión que para compresión ha de ser una función par de las tensiones, o lo que es igual una función par de J_3' ya que J_2' es par en sí.

Efectivamente J_2' puede ponerse en la forma

$$J_2' = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 / 6$$

Con todas estas restricciones iniciales puede definirse un criterio de plastificación, y de hecho se han realizado muchos, algunos de los cuales cumplen estas condiciones y otros no en orden a representar lo mejor posible los comportamientos de distintos tipos de materiales. A continuación presentaremos algunos de ellos de los cuales los más importantes son los de Tresca y Von Mises - Hencky.

Comenzaremos por los criterios que no dependen de J_1 , aptos para metales, como se ha indicado, para a continuación pasar a criterios aplicables a materiales frágiles que dependen de J_1 .

La superficie depende también de la temperatura θ del material, encontrándose en experimentos recientes (Phillips en 1974) que en numerosos metales la forma que toman las diferentes superficies cuando varía la temperatura es tal que se encuentran envueltas por un cono y que en la mayoría de las ocasiones se obtienen superficies de plastificación muy próximas a las predichas por el criterio de Von Mises (fig 2.11)

En general, la superficie de plastificación es función de σ_{ij} , ϵ_{ij}^P y θ y de un parámetro χ de endurecimiento que depende del trabajo de deformación plástico W^P .

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P, \theta, \chi) = 0 \quad (2.7)$$

Pero como se ha indicado los efectos de ϵ_{ij}^P y χ se estudian en el capítulo 4 y el efecto de θ no lo tendremos en cuenta en este trabajo, recomendándose para el lector interesado las obras de Phillips.

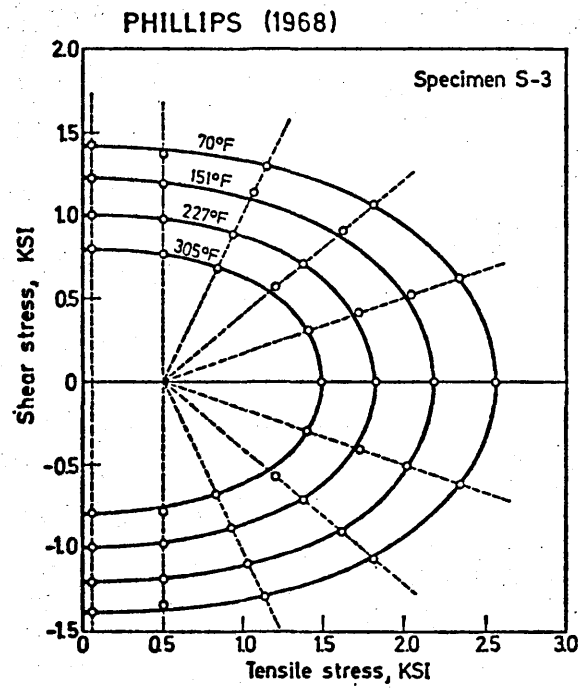


fig.- 2.11

2.4.- CRITERIOS DE PLASTIFICACION

2.4.1.- Criterio de Rankine y Lamé (1858 y 1852)

Es el primero en el tiempo y se limita a suponer que la plastificación se produce cuando la tensión mayor alcanza el valor correspondiente al ensayo de tracción σ_e . En un diagrama $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ las condiciones serían

$$|\sigma_I| < \sigma_e \quad |\sigma_{II}| < \sigma_e \quad |\sigma_{III}| < \sigma_e \quad (2.8)$$

Este criterio se presenta como un cubo en el espacio de tensiones principales de lado $2\sigma_e$ y centrado en el origen de tensiones (fig.2.12) y en el ensayo de tensión tangencial pura con $\sigma_I = -\sigma_{III} = \tau$ y $\sigma_{II} = 0$ representándolo en el espacio $\sigma_I - \sigma_{III}$ queda un cuadrado de lado $2\sigma_e$ y centrado en el origen.

Por último en el espacio de Haig - Westergaard se puede representar la intersección con el plano Π que sería un hexágono regular (fig.2.13)

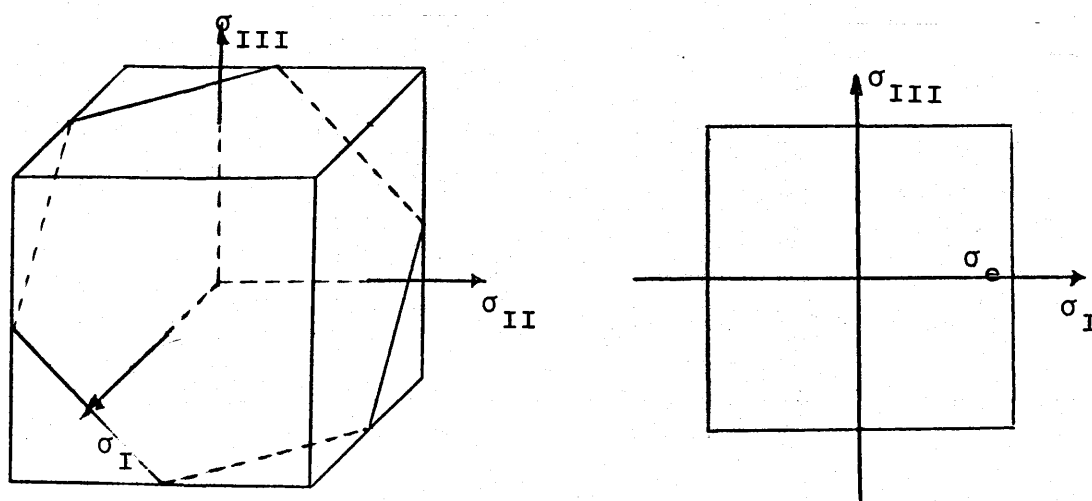


fig.- 2.12

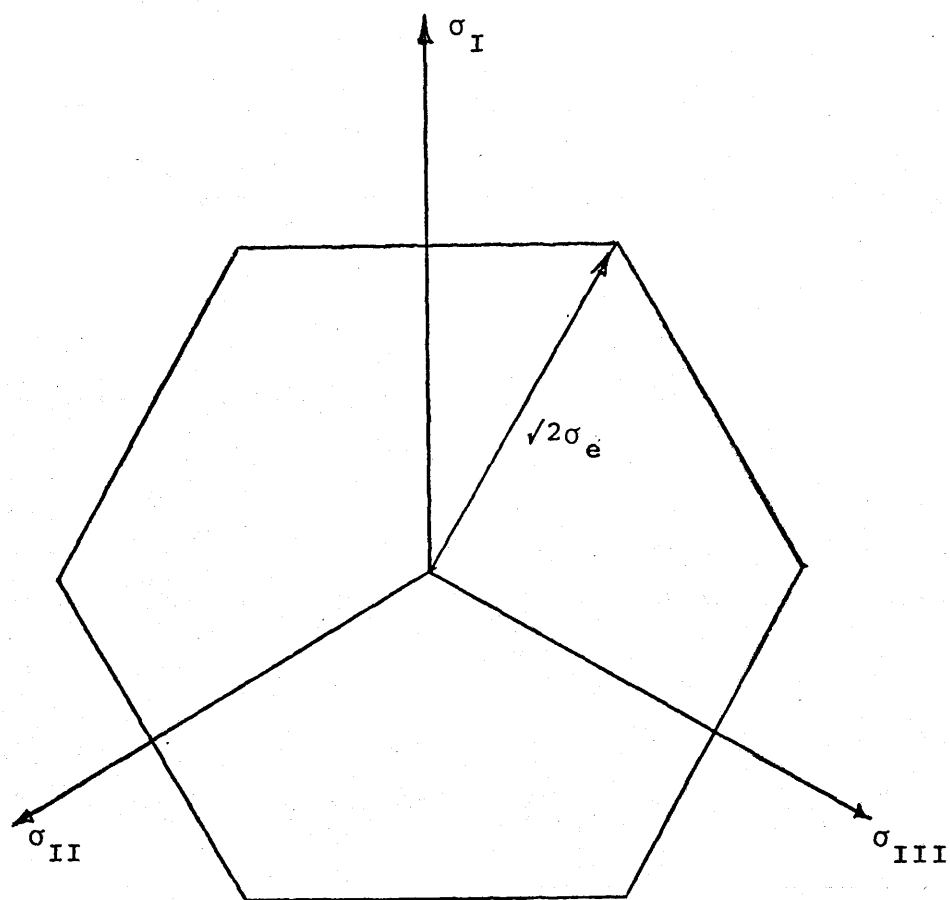


fig.- 2.13

Para ver lo erróneo de este criterio basta comprobar -
 que, en el acero, en el ensayo de tensión tangencial pura -
 $\tau_{\max} \approx 0,56 \sigma_e$ con lo que la diferencia con este criterio que su-
 pone $\tau_{\max} = \sigma_e$ es evidente. Por otro lado no parece lógico la -
 igualdad de resultados para tres situaciones tan diferentes como
 las indicadas en las figuras siguientes que supone este criterio

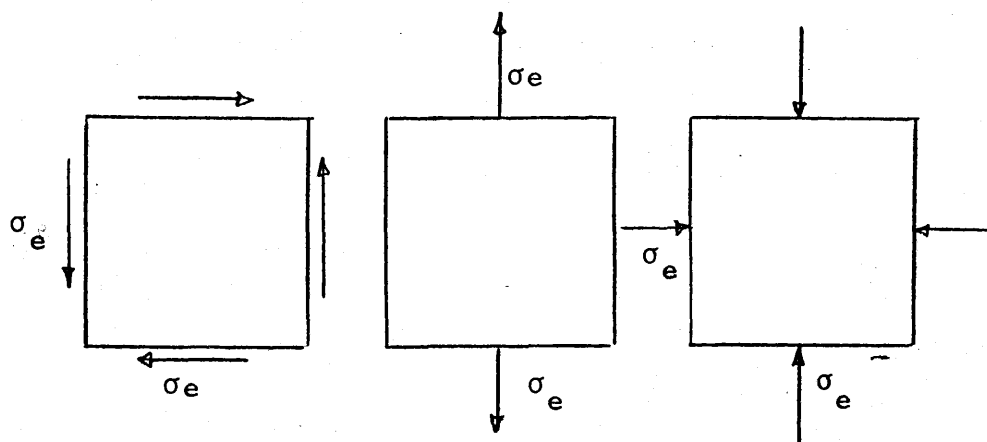


fig.- 2.14

Sin embargo sí tiene aplicación en rotura de cristales. Su expresión en función de los invariantes se obtiene como

$$|(\sigma_I - \sigma_e)(\sigma_{II} - \sigma_e)(\sigma_{III} - \sigma_e)| = 0$$

$$|\sigma_e^3 - J_1 \sigma_e^2 - J_2 \sigma_e - J_3| = 0 \quad (2.9)$$

2.4.2.- Criterio de Saint-Venant y Poncelet (1870 y 1839)

Este otro criterio propuesto independientemente por Poncelet y Saint-Venant para materiales frágiles supone que el material se plastifica cuando la deformación principal máxima alcanza el valor del ensayo de tracción. En éste $\epsilon = \sigma_e/E$, por lo que

$$|\epsilon_I| = \left| -\frac{1}{E} (\sigma_I - \nu (\sigma_{II} + \sigma_{III})) \right| < \sigma_e/E \quad \text{o lo que es igual}$$

$$|\sigma_I - \nu (\sigma_{II} + \sigma_{III})| - \sigma_e < 0 \quad \text{y análogamente}$$

$$|\sigma_{II} - \nu (\sigma_I + \sigma_{III})| - \sigma_e < 0 \quad (2.10)$$

$$|\sigma_{III} - \nu (\sigma_I + \sigma_{II})| - \sigma_e < 0$$

Se representa en el espacio de tensiones principales - como un romboedro (fig.2.15) y en el caso de tensión tangencial - pura $\sigma_I = -\sigma_{III}$ y $\sigma_{II} = 0$ se tiene que

$|\sigma_I - \nu\sigma_{III}| - \sigma_e < 0$ que para $\nu = 0,25$ por ejemplo da un valor de $\sigma_I = -\sigma_{III} = \tau = \sigma_e/1,25 = 0,80 \sigma_e$ que no está de acuerdo tampoco con los ensayos experimentales. En este caso este criterio se representa por un rombo en el plano $\sigma_I \sigma_{II}$ (fig 2.16).

$\nu = 0,25$

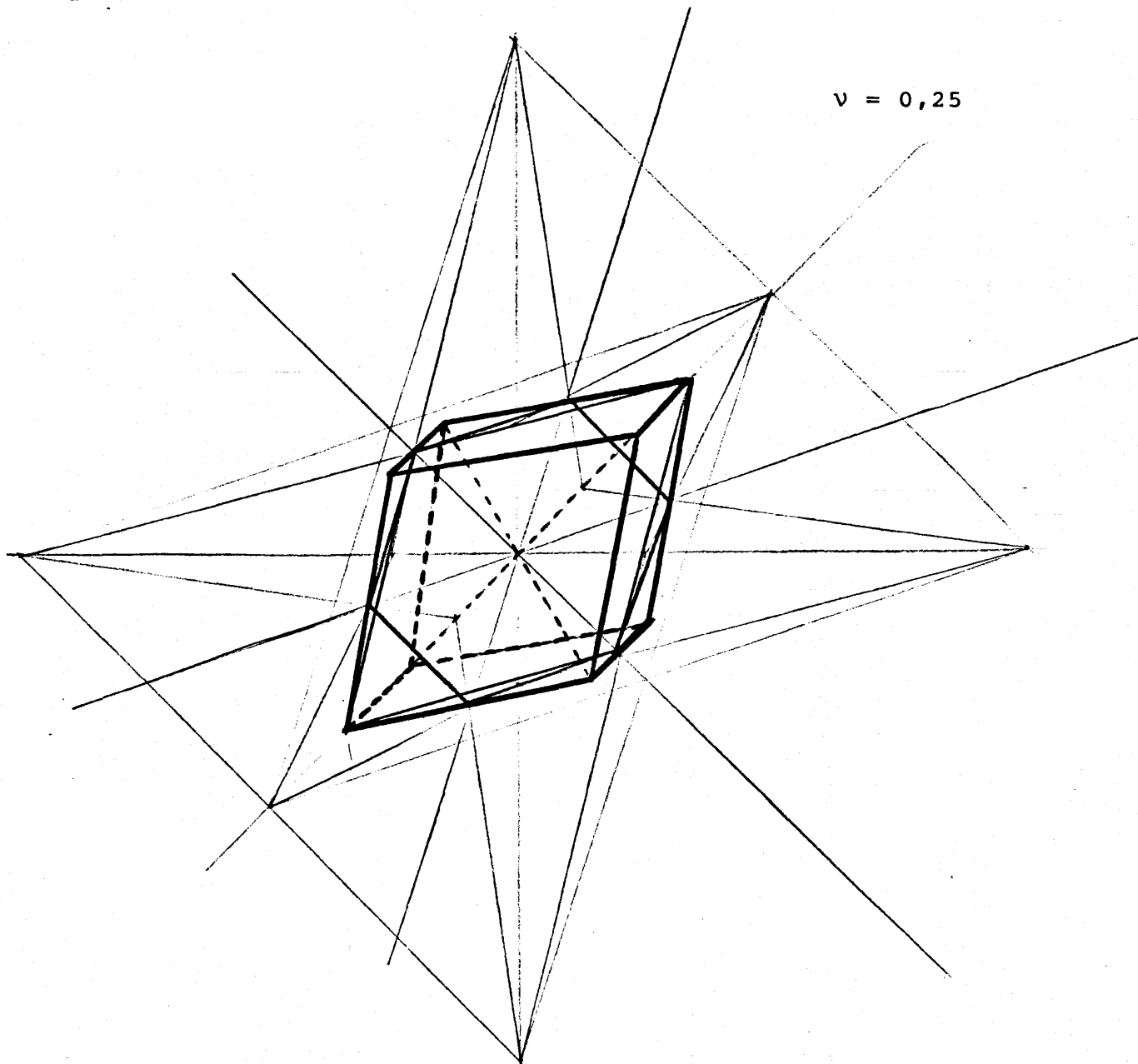


fig.- 2.15

Por último la intersección con el plano Π es un hexágo no regular.

No tiene una representación fácil en función de los invariantes por lo que no suele utilizarse.

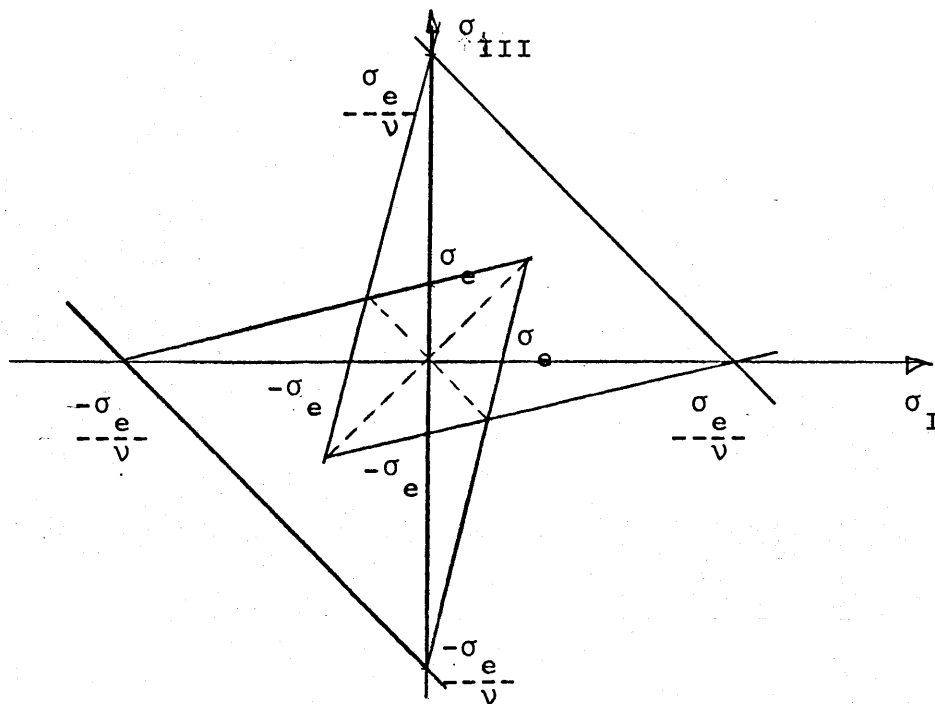


fig.- 2.16

La intersección del plano $\sigma_I - v(\sigma_{II} + \sigma_{III}) = \sigma_e$ con el plano Π que es el plano $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$ sería la recta

$$R \equiv \begin{cases} \sigma_I - v(\sigma_{II} + \sigma_{III}) - \sigma_e = 0 \\ \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0 \end{cases}$$

que se vería en verdadera magnitud en el espacio de Haig -Wester_gaard, pues para cualquier punto de esta recta $\sigma_{oct} = 0$. Con ello, dos puntos de esta traza serían los

$$\sigma_{III} = 0 \quad \sigma_{II} = \sigma_I \quad \sigma_I = \sigma_{II} = \frac{\sigma_e}{1+\nu} \quad \text{punto A de la fig. 18.}$$

$$\sigma_{II} = 0 \quad \sigma_{III} = \sigma_I \quad \sigma_I = \sigma_{III} = \frac{\sigma_e}{1+\nu} \quad \text{punto B de la fig. 18.}$$

Con lo cual ésta recta sería la AB y operando análogamente con el resto de los planos se obtiene la traza de la superficie de plastificación con el plano II que es también un hexágono regular de radio $\sigma_e \sqrt{2}/1+\nu$ como indica la (fig2.17).

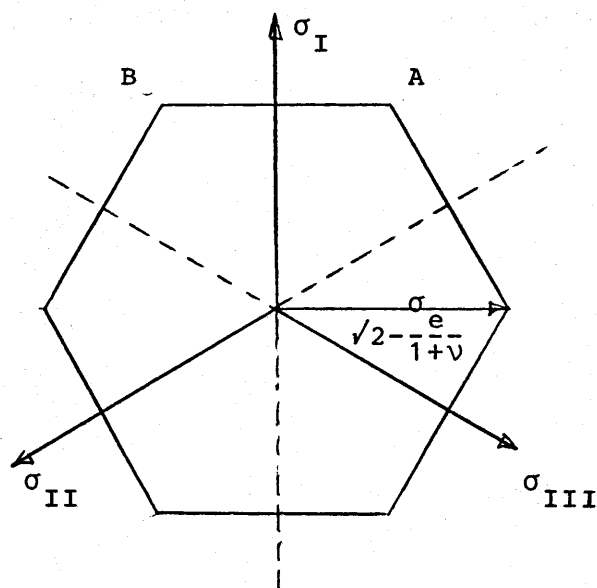


fig.- 2.17

2.4.3.- Criterio de Tresca-Guest (1868 y 1872)

Las primeras investigaciones de un criterio de plastificación fueron realizadas mediante una larga serie de experimentos por Tresca (1864), en los cuales midió las cargas necesarias para extruir metales de varias formas. La distribución de tensiones en la zona plástica estaba lejos de ser uniforme y el intento de Tresca de analizarla fue poco aproximado. En el ensayo de trac -

ción se observa en el momento de la plastificación la aparición de unas líneas a 45° del eje de la probeta que reflejan la reordenación del material. Estas líneas de Lüders y Hartmann hicieron pensar en la posibilidad de que la rotura se produzca por es fuerzo cortante, ya que es en esos planos donde se produce la máxima tensión tangencial en el ensayo de tracción.

Tresca propuso el criterio de plastificación para metales que lleva su nombre y que supone que la plastificación se produce cuando la tensión máxima alcanza la tensión tangencial máxima en el ensayo de tracción.

Observando los círculos de Mohr para un ensayo general tridimensional y otro monodimensional de tracción (fig. 2.18)

$$\left| \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right| = \frac{\sigma_e}{2} \quad \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right| = \frac{\sigma_e}{2} \quad \left| \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right| = \frac{\sigma_e}{2}$$

(2.11)

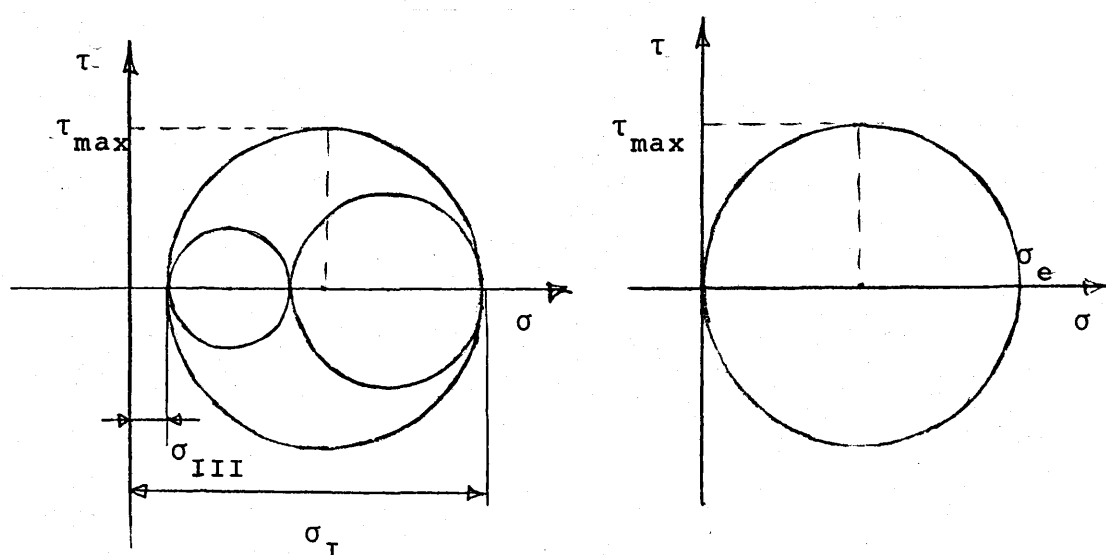


fig.- 2.18

donde se ha tenido en cuenta la arbitrariedad de la elección de las tensiones principales σ_I , σ_{II} , σ_{III} , pudiendo resumirse como

$$\begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{II} &= \sigma_e & \sigma_{II} - \sigma_I &= \sigma_e \\ \sigma_{II} - \sigma_{III} &= \sigma_e & \sigma_{III} - \sigma_{II} &= \sigma_e \\ \sigma_{III} - \sigma_I &= \sigma_e & \sigma_I - \sigma_{III} &= \sigma_e \end{aligned}$$

Cada una de estas ecuaciones representa un plano paralelo a la diagonal principal. Efectivamente, la normal al plano $\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_e$ por ejemplo sería $(1, 0, -1)$, que al multiplicarla escalarmente por un vector de la diagonal principal por ejemplo el $(1, 1, 1)$ se observa que el resultado es cero, es decir el plano $\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_e$ es paralelo a la diagonal principal, y análogamente para el resto.

El criterio de Tresca representa pues una superficie prismática con eje la diagonal principal e indefinida y de sección recta un hexágono. En el espacio de tensiones principales puede representarse en la forma que indica la (fig. 2.19) mientras que para $\sigma_{II} = 0$

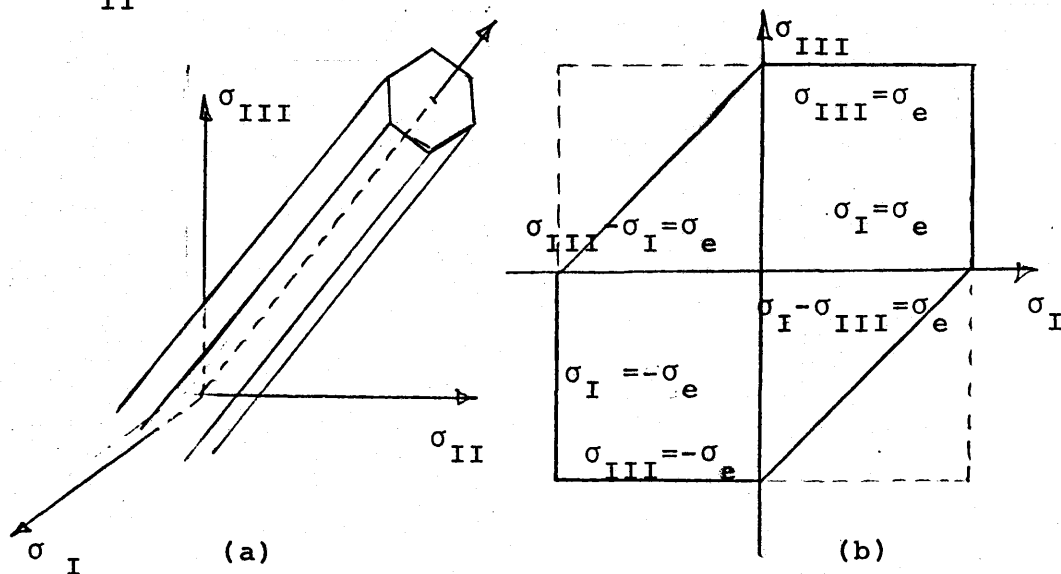


fig.- 2.19

es decir en un caso plano quedarían las rectas de definición del criterio, que realmente serían las trazas de la superficie de plastificación con el plano $\sigma_{II} = 0$ como

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_e$$

$$\sigma_{III} - \sigma_I = \sigma_e$$

$$\sigma_I = \sigma_e$$

$$\sigma_I = -\sigma_e$$

$$\sigma_{III} = \sigma_e$$

$$\sigma_{III} = -\sigma_e$$

que vienen representadas en la fig.220.b.

Por último, veamos como viene representado en el espacio de Haig -Westergaard. La traza del plano $\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_e$ con el plano Π será un hexágono regular ya que el plano Π es perpendicular a la dirección principal. Esa traza será la recta.

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_e$$

$$\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$$

dos de cuyos puntos son $\sigma_{III} = 0$ $\sigma_I = \sigma_e$ $\sigma_{II} = -\sigma_e$ y

$$\sigma_{II} = 0 \quad \sigma_I = -\frac{\sigma_e}{2} \quad \sigma_{III} = -\frac{\sigma_e}{2}$$

que vienen representados por los puntos A y B de la (fig.221a) - adjunta. Procediendo análogamente con el resto de los planos se obtiene el hexáedro de Tresca de lado $\sqrt{2/3} \sigma_e$, como se deduce inmediatamente de la figura. Efectivamente, un vector uniaxial, como se vió en 16 se proyecta en perspectiva axonométrica como $\sqrt{2/3}$ de su modulo (vease fig.220. b)

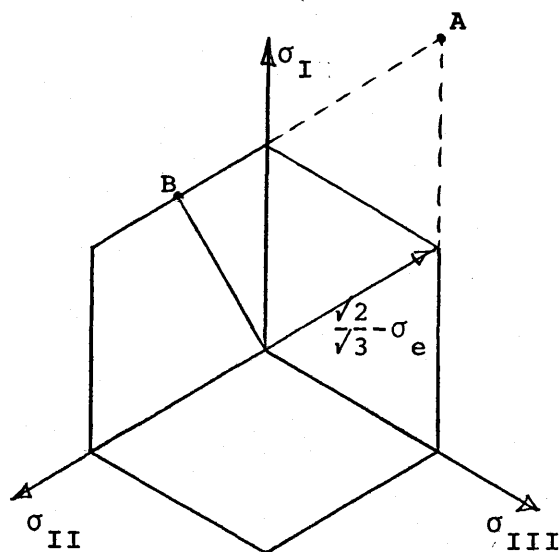


fig.- 2.20.a

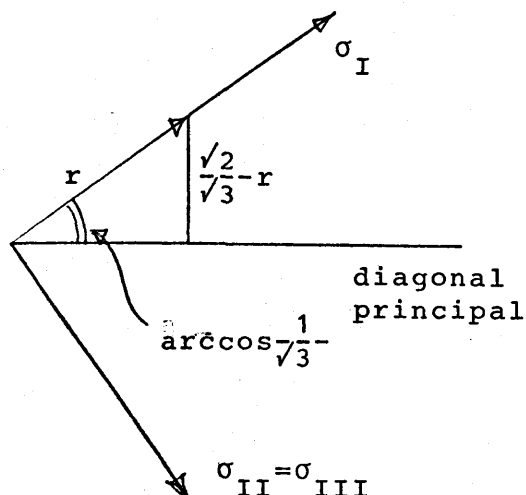


fig.2.20.b

Este criterio es pues el primero de los vistos que no depende de J_1 sino que conserva la forma y módulo para cualquier valor de éste. Efectivamente se puede conseguir expresar el criterio de Tresca en función de J_2' y J_3' , llegando a la relación

$$4J_2'^3 - 27J_3'^2 - 36k^2 J_2'^2 + 96k^4 J_2' - 64k^6 = 0 \quad (2.12)$$

donde $k = \sigma_e/2$.

A esta ecuación se llega después de gran cantidad de trabajo y debido a su complicación frente a la ecuación (2.11) inicial del criterio de Tresca no suele utilizarse. Sin embargo es útil para observar que la función de plastificación es una función par de J_3' siendo por tanto la función completa una función par y en definitiva invariante frente a los cambios de signo de las tensiones, de tal forma que recordando el epígrafe 2.1 se tiene que esta función representa un cilindro que satisface la isotropía, y sin efecto Bauschinger.

Por último diremos que para el ensayo de tensión tangencial pura $\sigma_I = -\sigma_{III} = \tau$ $\sigma_{II} = 0$ se tiene que el ensayo de Tresca predice que la plastificación se produce para.

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_e \quad 2\sigma_I = 2\tau = \sigma_e \quad \tau = 0,5 \sigma_e$$

que está más cerca de los resultados experimentales como se ve en el epígrafe correspondiente.

2.4.4.- Criterio de Beltrami y Haig (1903 y 1919)

Hasta este momento los criterios planteados lo han sido como una comparación entre tensiones del caso general y tensiones en el ensayo de tracción. Sin embargo, una aproximación buena podría ser el intentar relacionar magnitudes escalares representativas de los estados de tensión de uno y otro estado. Esta hipótesis fue la que llevó a Beltrami y Haig a plantear como criterio de plastificación las relaciones entre energías de deformación en uno y otro caso. Para expresarlo vamos a dar una breve idea sobre energía elástica.

La energía elástica de un material se definió en (1.46) como

$$\xi = 1/2 \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

y en tensiones principales

$$\xi = -\frac{1}{2E} \{ \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III}) \}$$

y expresandola en función de los invariantes

$$\xi = -\frac{1}{2E} \{ J_1^2 - 2(1 + \nu) J_2 \}$$

Por ejemplo para el ensayo de tracción se tenía que

$$\xi_{\text{trac}} = -\frac{1}{2E} \sigma_t^2$$

De acuerdo con estas ideas básicas el criterio de Beltrami supone que un material se plastifica cuando la energía elástica almacenada es igual a la energía de deformación en el ensayo de tracción $1/2E \sigma_e^2$, es decir

$$J_1^2 - 2(1 + \nu) J_2 = \sigma_e^2 \quad (2.13)$$

Podemos hacer algunos comentarios a este criterio. En primer lugar se observa que depende de J_1 al contrario del criterio de Tresca. Por otro lado en el caso de tensión tangencial para $\sigma_I = -\sigma_{III}$ y $\sigma_{II} = 0$ el criterio quedaria en la forma

$$-\frac{1}{2E} \{2\sigma_I^2 + 2\nu \sigma_I^2\} = -\frac{1}{2E} \sigma_e^2 \Rightarrow 2(1 + \nu) \tau^2 = \sigma_e^2$$

$$\tau = \frac{1}{2(1 + \nu)} \sigma_e \quad \text{que para } \nu \approx 0,25 \quad \tau \approx 0,63 \sigma_e$$

algo alejado de los resultados experimentales.

Su representación en el espacio de tensiones principales viene dada por la superficie de expresión

$$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I) - \sigma_e^2 = 0 \quad (2.14)$$

que es un elipsoide de revolución con eje mayor en la diagonal principal. Efectivamente si efectuamos un cambio de coordenadas tal que σ_I coincida con la diagonal principal y σ_{II} y σ_{III} sean perpendiculares a ella, por ejemplo el cambio definido por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{Bmatrix} \quad \text{nueva}$$

$$\sigma_I = -\frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_I^n - \sqrt{2} \sigma_{III}^n)$$

$$\sigma_{II} = -\frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} \sigma_I^n + \sqrt{3} \sigma_{II}^n + \sigma_{III}^n)$$

$$\sigma_{III} = -\frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} \sigma_I^n + \sqrt{3} \sigma_{II}^n + \sigma_{III}^n)$$

y sustituyendo en la expresión de la superficie se tiene que la expresión de esta superficie sería

$$2 \sigma_I^{n2} + (1 - \nu) (\sigma_{II}^{n2} + \sigma_{III}^{n2}) - 6 \sigma_e^2 = 0$$

que es un elipsoide de eje mayor $2\sqrt{3} \sigma_e$ y de radio de las circunferencias igual a

$$r^2 = \frac{6\sigma_e^2 - 2\sigma_I^{n2}}{(1 - \nu)}$$

con lo que el radio de la traza de la superficie de Beltrami con el plano II es.

$$r = \frac{6}{1 - \nu} \sigma_e$$

Los vértices del elipsoide se producen en los puntos $\sigma_I^n = \sqrt{3} \sigma_e$, es decir en el punto $(\sigma_e, \sigma_e, \sigma_e)$.

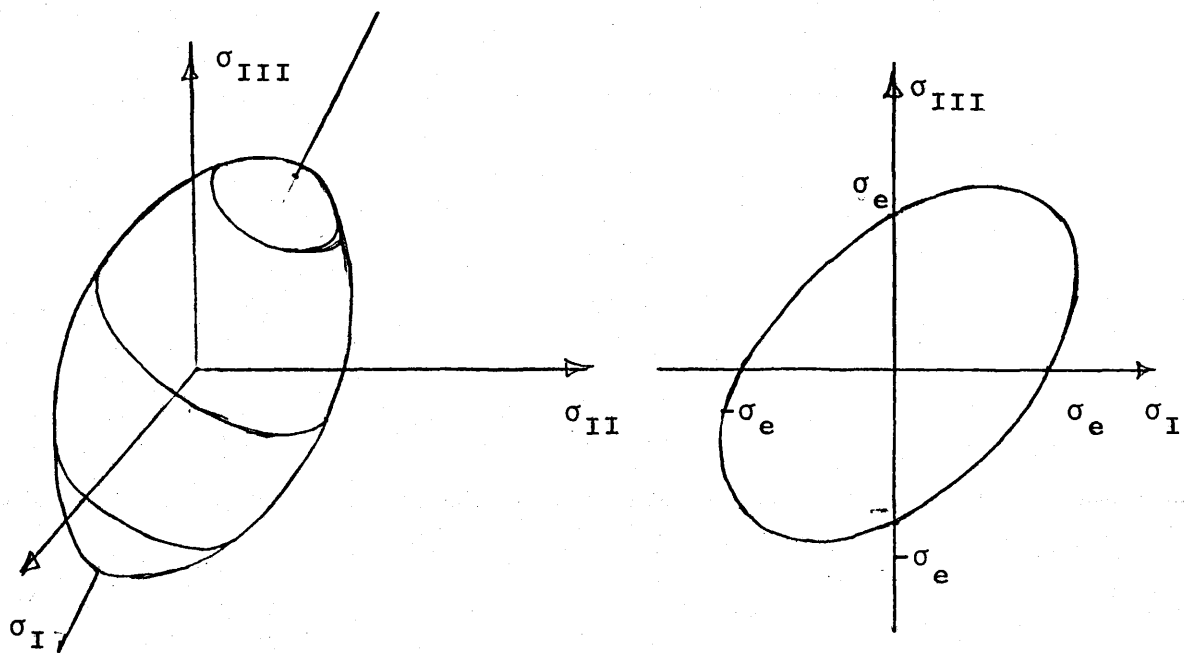


fig.- 2.21

La intersección con el plano $\sigma_{II} = 0$ de este criterio_ sería

$$\sigma_I^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu \sigma_I \sigma_{III} = \sigma_e^2$$

que es una elipse centrada tal como indica la (fig.2.21).

Por último como hemos dicho la intersección con el pla_ no II es una circunferencia de radio $\sqrt{6/1-\nu} \sigma_e$ que en el sistema_ de ejes axonométrico se proyectará con radio

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{6}{1-\nu}} \sigma_e = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \sigma_e$$

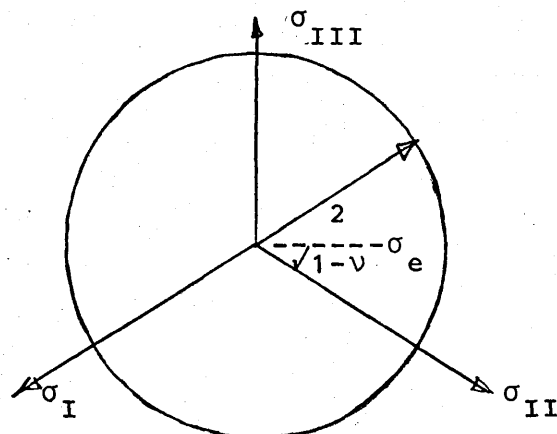


fig.- 2.22

2.4.5.- Criterio de Von Mises-Hencky (1913)

Tratando de suavizar la superficie obtenida por Tresca, y que en la primera década del siglo era el criterio más aceptado, Von Mises propuso un cilindro circular con eje en la diagonal principal e indefinido. De acuerdo con ello, y recordando que el cuadrado del módulo de un vector desviador era el doble del segundo invariante de tensiones desviadores J'_2 (1.6), este criterio podría expresarse como que el radio del círculo es constante, es decir que J'_2 lo es, o más comunmente.

$$J'_2 = k^2$$

Debido a la simetría radial existente, este criterio implica isotropia y por tanto ausencia de efecto Bauschinger, y asimismo olvida el efecto del invariante J'_3 , sin embargo no por ello ha dado malos resultados, siendo actualmente para metales el criterio de plastificación más aceptado.

Para calcular la constante k solo se precisa particularizar para el ensayo de tracción, con lo que

$$J'_2 = J_2 + 1/3 J_1^2 = 0 + 1/3 \sigma_I^2 = 1/3 \sigma_I^2$$

$$1/3 \sigma_e^2 = k^2 \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_e$$

$$J'_2 = 1/3 \sigma_e^2 \quad (2.16)$$

En definitiva el criterio de Von Mises representa un cilindro de radio

$$r = \sqrt{2 J'_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e \quad (2.17)$$

que se proyecta en el plano II en verdadera magnitud, con lo que en ese plano obtendremos un círculo de radio el anterior y por tanto circunscrito al hexágono de Tresca. En la fig2.23.a se representan los dos criterios, mientras que en la (fig2.23.b) se representa el cilindro de Mises en el espacio de tensiones principales.

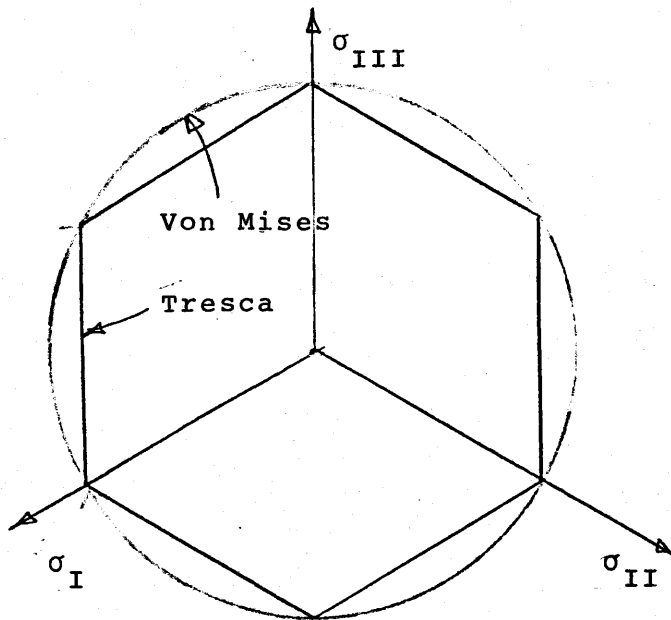


fig.- 2.23.a

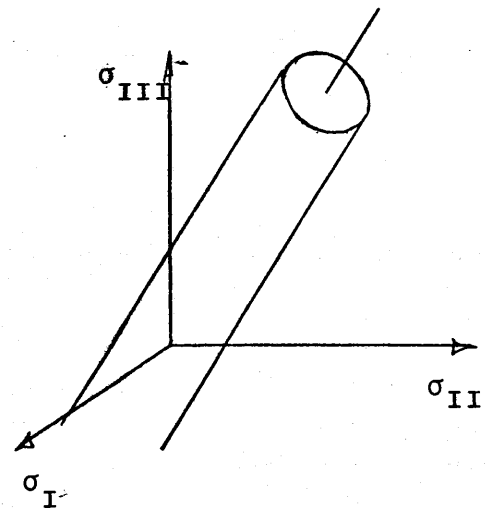


fig.- 2.23.b

Recordando la expresión de J_2' tendríamos que

$$J_2' = 1/3 J_1^2 + J_2 = \frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2}{3} -$$

$$- (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I) =$$

$$= -\frac{1}{6} \{ (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \}$$

Así pues otra forma útil de expresar el criterio de Von Mises es

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = \sqrt{2}\sigma_e$$

(2.18)

Si particularizamos para el ensayo de tensión tangencial pura $\sigma_{II} = 0$ el criterio de Von Mises dará

$$\frac{(\sigma_I + \sigma_{III})^2}{3} - \sigma_I \sigma_{III} = 1/3 (\sigma_I^2 + \sigma_{III}^2) - 1/3 \sigma_I \sigma_{III} =$$

$$= 1/3 \sigma_e \text{ o lo que es igual}$$

$$\sigma_I^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I \sigma_{III} - \sigma_e^2 = 0$$

que es la ecuación de una elipse centrada tal como indica la figura 2.24.

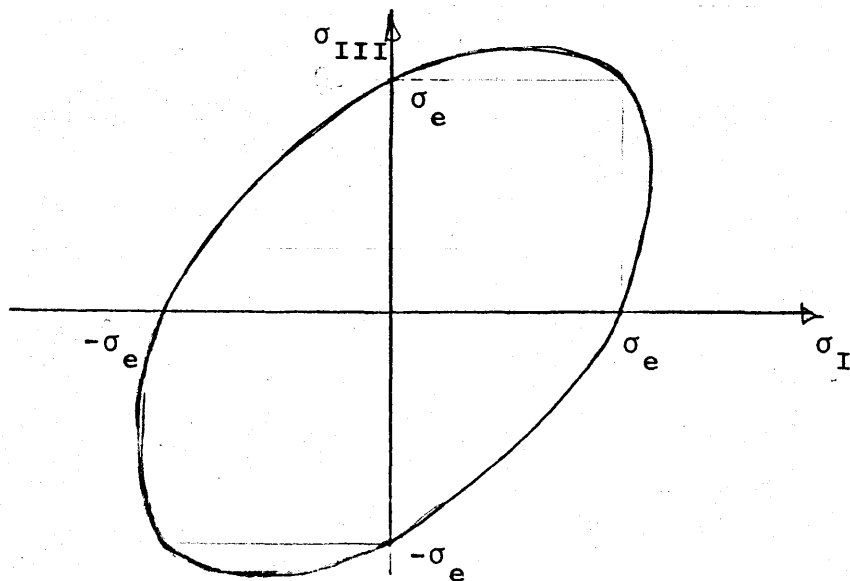


fig.- 2.24

En este caso, haciendo $\sigma_{III} = -\sigma_I = \tau$ obtenemos el ensayo de tensión tangencial pura representado en la elipse anterior por los puntos A y B observandose que en este caso queda

$$\sigma_I^2 + \sigma_I^2 + \sigma_I^2 = \sigma_e^2 \quad \sigma_I = 1/\sqrt{3} \sigma_e$$

Es decir según este criterio la $\tau_{\max} = 1/\sqrt{3} \sigma_e = 0,577 \sigma_e$ que es muy próximo a los ensayos ya citados de Lode que daban como resultado $\tau_{\max} = 0,56 \sigma_e$.

Se observa también que τ_{\max} de Von Mises es igual a $2/\sqrt{3} \tau_{\max}$ de Tresca siendo por tanto algo mayor, y se ve también que $\tau_{\max} = k$ en Von Mises por lo que otra expresión del criterio de Von Mises podía ser

$$J_2 = \tau_{\max} \quad (2.19)$$

Existe otra definición para este criterio dada por Nadai y que se consigue inmediatamente recordando la expresión de τ_{oct} en función de los invariantes

$$\tau_{\text{oct}}^2 = -\frac{2}{9} J_1^2 + \frac{2}{3} J_2 = -\frac{2}{3} J_2'$$

y por tanto el criterio también puede expresarse como

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{2/3} \sigma_e \quad (2.20)$$

Todas estas expresiones son útiles para la utilización de este criterio como variaciones sobre la hipótesis inicial de Von Mises que resultaba simplemente de la facilidad de uso de una superficie suave en vez de angulosa como la de Tresca. Esta hipótesis absolutamente gratuita y al margen de significado físico, fue retocada como se ha dicho por Hencky (1924) siguiendo los trabajos de Beltrami y Haig en orden a obtener un criterio dependiente exclusivamente de una magnitud energética.

Para ello (recordemos los ensayos de Bridgman) consideró despreciables la energía de deformación correspondiente a la deformación octaédrica y postuló que la plastificación se producía cuando la energía desviadora era igual a la energía desviadora producida en el ensayo de tracción en el momento de la plastificación. Si ahora se retoman los valores de estas energías dadas en el epígrafe 1.10, igualando para $\sigma_{trac} = \sigma_e$ se tiene

$$\xi' = \xi'_{trac} \quad -\frac{1}{2G} J'_2 = -\frac{1}{6G} \sigma_e^2$$

$$J'_2 = 1/3 \sigma_e^2 \quad (2.21)$$

que es efectivamente el criterio de Von Mises.

Para terminar diremos que este criterio tampoco limita el estado de tracción isótropa, por lo cual Huber ha propuesto adoptar el criterio de Beltrami siempre que se tenga $J_1 > \sigma_e$.

$$J'_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$$

2.4.6.- Criterios dependientes de J_1

En muchos materiales, en especial suelos, la plasti
ficación depende también de la tensión esférica a que están som
tidos, es decir, el criterio de rotura depende también del pri -
mer invariante de tensiones, pudiendo expresarse.

$$f(J_1, J_2, J_3) = 0$$

El más antiguo (1773) y sin embargo el más en uso aún
es el criterio de Mohr-Coulomb que supone que la plastificación
se produce cuando la relación entre la tensión tangencial genera
lizada q y la tensión media p para el círculo de Mohr exterior -
definidas en la forma

$$q = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

$$p = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}$$

es $q = f(p)$

donde f en el caso más simple toma la forma de una recta como

$$q = p \operatorname{sen} \varnothing + c \cos \varnothing \quad (2.22)$$

donde c es la cohesión y \varnothing el ángulo de rozamiento, parámetros
del material y que para suelos que es donde más usualmente se -
utilizan dependen de algunas variables del suelo como el índice
de poros, la humedad y el tipo de ensayo que se realice, entre -
otras cosas.

Esa ecuación puede escribirse en las formas

$$\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \operatorname{sen} \phi + \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = c \cos \phi$$

$$\sigma_I (1 + \operatorname{sen} \phi) = 2 c \cos \phi + (1 - \operatorname{sen} \phi) \sigma_{III} \quad (2.23)$$

$$\sigma_{III} = \sigma_I \operatorname{tg}^2 (\pi/4 + \phi/2) - 2 c \operatorname{tg} (\pi/4 + \phi/2)$$

$$\sigma_I = \sigma_{III} \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} \right) + 2 c \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi}}$$

La interpretación física de este criterio es simple, - ya que para el caso de material con cohesión nula y en dos dimensiones se tiene, observando el círculo de Mohr (fig.2.25).

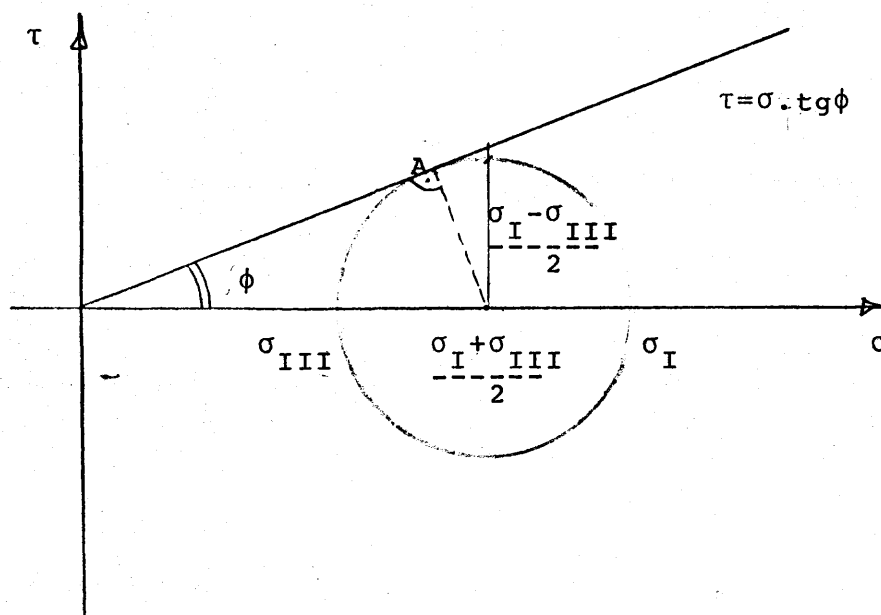


fig.- 2.25

que $q = \tau_{\max}$ $p = \sigma_{\text{oct}}$ con lo que la relación sería

$$\tau_{\max} \operatorname{sen} \phi = -\sigma_{\text{oct}}$$

$$\tau_{\max} = -\sigma_{\text{oct}} \operatorname{sen} \phi$$

relación que se produce en el punto A donde también $\tau = -\sigma \operatorname{tg} \phi$ - que es la ecuación de la tangente al círculo de Mohr con cohesión nula, y Esta es la típica ecuación de movimiento debido a rozamiento si la σ la consideremos positiva a tracción como siempre. El sentido físico del criterio de Mohr-Columb es claro - pues: considera que se produce la plastificación como consecuencia de ser mayor la tensión tangencial que la fuerza de rozamiento interno correspondiente a la tensión de compresión aplicada.- Naturalmente cuando existe cohesión esa fuerza se ve incrementada con el término anteriormente descrito.

La interpretación geométrica en el diagrama de Mohr - también es simple: la plastificación se produce cuando el círculo mayor es tangente a la recta $\tau = \sigma \operatorname{tg} \phi + c$ tanto en tracción como en compresión (fig 2.26)

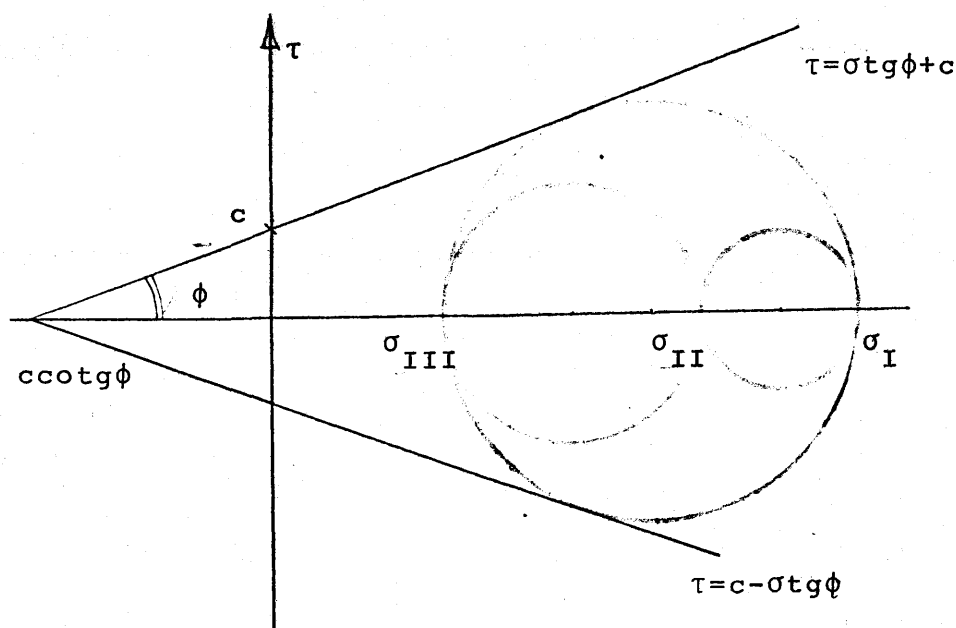


fig.- 2.26

Realmente en el sistema de ejes principales la ecuación de Mohr representa un plano, de forma que si de nuevo tenemos en cuenta la arbitrariedad de la ordenación de las tensiones principales el criterio significa 6 planos y puede escribirse según Shield en forma de producto de estos 6 planos como

$$\begin{aligned} & \{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 - (2c \cos \varnothing + (\sigma_I + \sigma_{II}) \operatorname{sen} \varnothing)^2\} \{(\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 - \\ & - (2c \cos \varnothing + (\sigma_{II} - \sigma_{III}) \operatorname{sen} \varnothing)^2\} \{(\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - (2c \cos \varnothing + \\ & + (\sigma_{III} - \sigma_I) \operatorname{sen} \varnothing)^2\} = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Es de destacar que para el caso de sólidos sin cohesión cada uno de los planos tiene la forma de

$$\sigma_I = \frac{1 - \operatorname{sen} \varnothing}{1 + \operatorname{sen} \varnothing} \sigma_{III} \quad (2.25)$$

que correspondería a materiales tales como la arena seca o similares, y en cambio para materiales cohesivos con rozamiento interno nulo se tiene como ecuación del plano

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2c \quad (2.26)$$

que corresponde exactamente al criterio de Tresca.

La representación en el espacio de tensiones principales de este criterio es la de una pirámide hexágonal no regular y con eje la diagonal principal.

Efectivamente para c y \varnothing constantes la ecuación de un plano sería

$$\sigma_I = k_1 \sigma_{III} + k_2$$

donde k_1 y k_2 son las mismas para cada plano.

La intersección de tres de estos planos estará en el punto

$$\sigma_I = k_1 \sigma_{II} + k_2$$

$$\sigma_{II} = k_1 \sigma_{III} + k_2 \quad \sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{k_2 (k_1^2 + k_1 + 1)}{1 - k_1^3}$$

$$\sigma_{III} = k_1 \sigma_I + k_2$$

y sustituyendo ahora

$$k_1 = \frac{1 - \operatorname{sen} \varnothing}{1 + \operatorname{sen} \varnothing} \quad k_2 = 2c \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} \varnothing}{1 + \operatorname{sen} \varnothing}}$$

tenemos que el vértice de la pirámide se encuentra en la diagonal principal en el punto

$$\begin{aligned} \sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} &= \frac{2c \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} \varnothing}{1 + \operatorname{sen} \varnothing}} \left(\frac{(1 - \operatorname{sen} \varnothing)^2 + (1 - \operatorname{sen} \varnothing)(1 + \operatorname{sen} \varnothing) + (1 + \operatorname{sen} \varnothing)^2}{(1 + \operatorname{sen} \varnothing)^2} \right)}{\frac{(1 + \operatorname{sen} \varnothing)^3 - (1 - \operatorname{sen} \varnothing)^3}{(1 + \operatorname{sen} \varnothing)^3}} \\ &= \frac{2c \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} \varnothing}{1 + \operatorname{sen} \varnothing}} (1 + \operatorname{sen} \varnothing) (3 + \operatorname{sen}^2 \varnothing)}{2 \operatorname{sen} \varnothing (3 + \operatorname{sen}^2 \varnothing)} = \frac{c}{\operatorname{sen} \varnothing} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varnothing} \end{aligned}$$

Naturalmente para $c = 0$ se encontraría en el origen y para $\varnothing = 0$ en el ∞ como corresponde al criterio de Tresca.

Por último veamos la intersección de uno de estos planos con un plano perpendicular a la diagonal principal, que se -

ría la recta

$$\begin{cases} \sigma_I = k_1 \sigma_{III} + k_2 \\ \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = a \end{cases}$$

en la que podríamos representar los puntos

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{a - k_2}{2 + k_1} \quad \sigma_I = \frac{k_1 a + 2k_2}{2 + k_1} \quad y$$

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \frac{k_1 (a - 2k_2)}{1 + 2k_1} + k_2 \quad \sigma_{III} = \frac{a - 2k_2}{1 + 2k_1}$$

que serían los puntos A y B en el diagrama de tensiones principales adjunto.

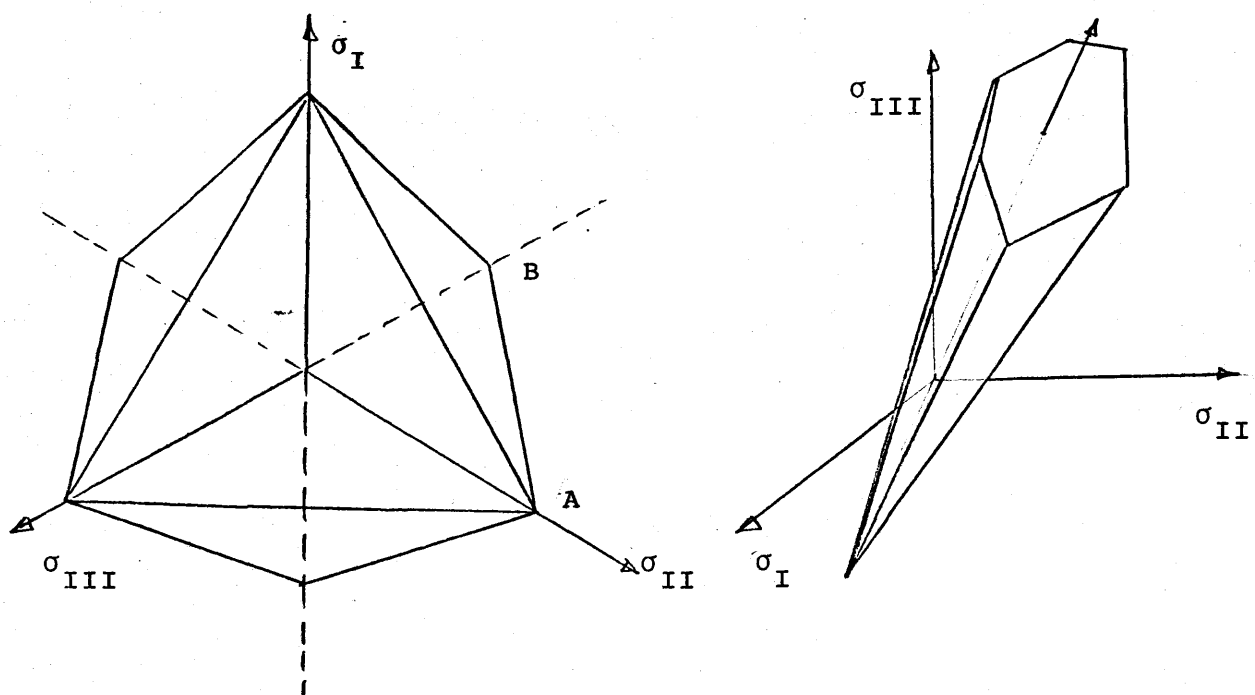


fig.- 2.27

Para el caso de $k_2 = 0$ y $a = 0$ es decir para cohesión nula y el plano π , lógicamente la intersección con este plano es un punto y $OA = OB = 0$.

Se observa también que de acuerdo con k_1 la superficie va cambiando de forma y la relación

$$\frac{OB}{OA} = \frac{2 + k_1}{1 + 2k_1} \quad \text{se va modificando.}$$

Particularmente para el caso de $k_1 = 1$, es decir para $1 - \sin \emptyset / 1 + \sin \emptyset = 1$ o lo que es igual para $\emptyset = 0$ $OB/OA = 1$ estamos en presencia de un hexágono regular correspondiente al criterio de Tresca como ya conocíamos. Para $\emptyset = 90^\circ$ $k_1 = 0$ y $OB/OA = 2$ que corresponde al caso del triángulo equilátero representado. Entre estos extremos el hexágono de Mohr se va moviendo para diferentes valores de \emptyset , como indica la (fig.2.27)

En el primer caso para el punto A

$$J_1 = a$$

$$J_2' = 1/3 J_1^2 + J_2 = a^2/3 - (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I) =$$

$$= a^2/3 - \frac{a^2(1+2k_1) + k_2(-2k_1a+2a-3k_2)}{(2+k_1)^2}$$

$$OA = \sqrt{2J_2'} = \sqrt{-\frac{2}{3} a^2 - \frac{2a^2(1+2k_1)}{(2+k_1)^2} + \frac{2k_2}{(2+k_1)^2}(2k_1a - 2a + 3k_2)}$$

Del mismo modo para el punto B

$$\sigma_{oct} = a/3 \quad J_1 = a$$

$$J_2' = 1/3 J_1^2 + J_2 = a^2/3 - \frac{k_1 a^2(k_1+2) + k_2(2a-3k_2)}{(1+2k_1)^2}$$

$$OB = \sqrt{2J_2'} = \sqrt{\frac{2}{3} a^2 - \frac{2}{(1+2k_1)^2} [k_1 a^2 (k_1+2) + k_2 (2a-3k_2)]}$$

de tal forma que para un caso simple por ejemplo $k_2 = 0$ se tendría

$$OA = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{k_1 - 1}{k_1 + 2} \right) a$$

$$OB = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{k_1 - 1}{1 + 2k_1} \right) a$$

y $\frac{OA}{OB} = \frac{1 + 2k_1}{2 + k_1} > 1$ $|OB| < OA$ por lo que representando -
estos dos puntos y el resto de los 6 planos quedaría en el espacio de Haig - Westergaard -
en la forma de la (fig2.28)

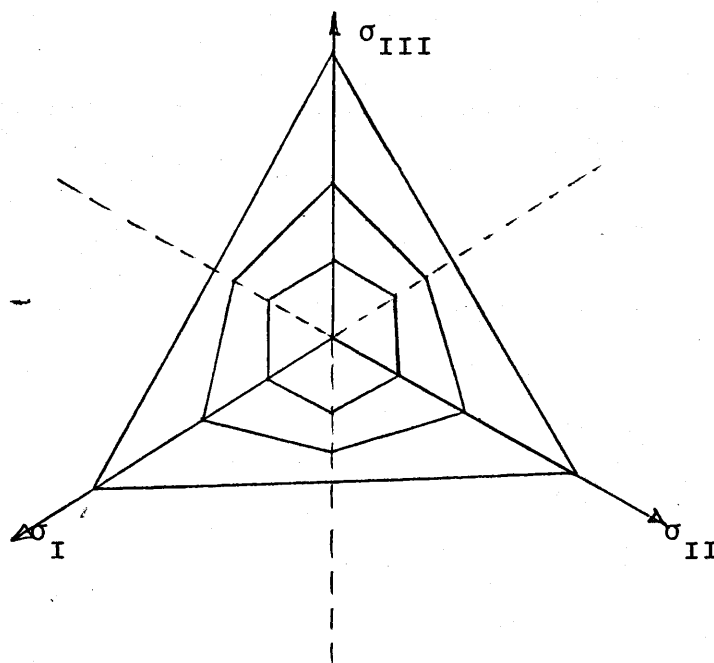


fig.- 2.28

La expresión del criterio de Mohr puede ponerse en función de los invariantes. Así la expresión de Shield quedaría

$$-\frac{1}{3} J_1 \operatorname{sen} \varnothing + (J_2')^{1/2} (\cos \varnothing - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \varnothing \cos \varnothing) = c \cos \varnothing \quad (2.27)$$

observandose la dependencia del primer invariante de tensiones.

Otros criterios de rozamiento son las generalizaciones de Tresca y Von Mises, conduciendo a pirámides de sección hexágono regular y circunferencia respectivamente.

La generalización del criterio de Tresca realizada por Drucker es la siguiente

$$(\sigma_I - \sigma_{III}) + \frac{a \operatorname{sen} \varnothing}{3} (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = k \quad (2.28)$$

donde k es función de la cohesión "c" y a es función de " \varnothing " definida como

$$a = \frac{\operatorname{sen} \varnothing}{3 + \operatorname{sen} \varnothing} \quad k = \frac{3 c \cos \varnothing}{3 + \operatorname{sen} \varnothing} \quad (2.29)$$

El hexágono regular de Tresca queda así inscrito al hexágono irregular de Coulomb.

En este caso la intersección de la pirámide con el plano $\sigma_I - \sigma_{III}$ difiere del de la (fig.2.28) convirtiéndose en el de la (fig.2.29).

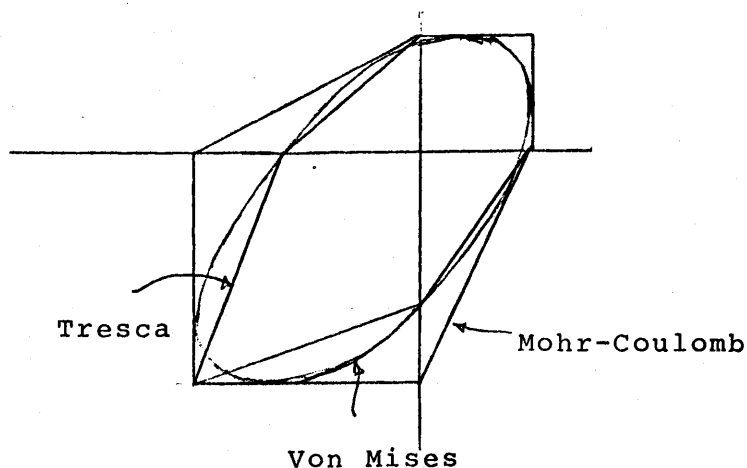


fig.- 2.29

Del mismo modo la generalización del criterio de Von Mises debida a Drucker y Prager es a partir de la expresión

$$a J_1 + \sqrt{J_2} = k \quad (2.30)$$

donde a y k son dos parámetros que Drucker y Prager ajustan para que en un caso de deformación plana este criterio coincida con el de Mohr-Coulomb es decir se circunscriba a aquél, resulta

$$a = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi}} \quad k = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi}} \quad (2.31)$$

y observando que para $\phi = 0$ $a = 0$ y $k = c$ el criterio de Drucker Prager queda como

$$\sqrt{J_2} = c$$

quedando inscrito ahora en el hexágono de Tresca.

Este criterio sin embargo no da muy buenos resultados, siendo preferible la elección de los parámetros a y k obligando a que cono y pirámide tengan el mismo vértice y a que la circunferencia pase por los vértices más internos del hexágono. Esta generalización del criterio de Von Mises es la debida a Olzak y Bishop.

En este caso

$$a = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{(3 - \operatorname{sen} \phi) \sqrt{3}} \quad k = \frac{2c \cos \phi}{(3 - \operatorname{sen} \phi) \sqrt{3}} \quad (2.32)$$

Todos estos criterios como se observa dependen exclusivamente de σ_I y σ_{III} , pero no de la tensión intermedia, lo que está claramente en contra de los experimentos en suelos. Por

ello se han introducido varias generalizaciones de los criterios anteriores en orden a tener en cuenta esta influencia.

2.5.- LA EVIDENCIA EXPERIMENTAL. LOS ENSAYOS DE LODE.

Sería deseable disponer de ensayos que permitieran analizar estados de tensiones complejos. Debido a la dificultad de realización de un verdadero ensayo triaxial la mayoría de los experimentos actuales se han realizado a base de ensayos de tracción y biaxiales. Ciertamente que en el fenómeno de "estricción" antes citado aparecen estados triaxiales, pero evolucionan sin control por lo que no se tienen en cuenta.

Se han propuesto varios tests biaxiales, como el estudio de tensiones en placas delgadas sometidas a presión (Mellor - 1956) o los de compresión con deformación plana de Orowan y Ford (1948). Muy interesantes han sido también los de Zener (1946) y Taylor (1931) y Lode (1925) con tubos sometidos a torsión y presión interna. Si el espesor de las paredes es suficientemente pequeño, se puede considerar un estado plano de tensiones, y mediante una combinación de presiones establecer estados biaxiales bastante generales. Si se dispone, por ejemplo, de un tubo cerrado por los extremos y R y e son el radio medio del cilindro y el espesor de la pared, una presión interior p provoca un esfuerzo axial $N = p \pi R^2$ que al ser repartido por el espesor de la sección induce una tensión

$$\sigma_1 = \frac{p \pi R^2}{2 \pi R e} = \frac{p R}{2 e}$$

Como la presión interior da lugar a tensiones radiales $\sigma_r = pR/e$ el estado de tensiones es el que se indica en la figura: variando σ_r se consiguen diferentes tensiones principales pero sin variar el tamaño del círculo de Mohr.

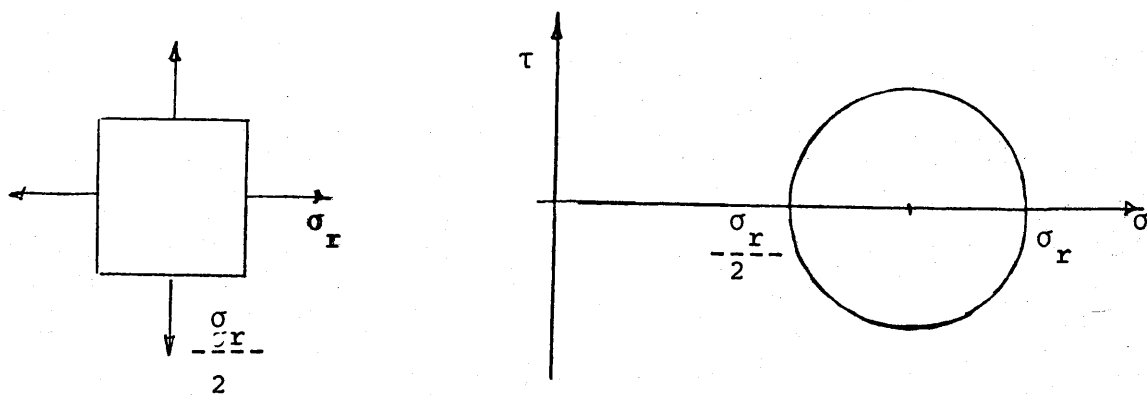


fig. 2.30

Una mayor variedad se obtiene introduciendo un par torsor M_t que produce $\tau = M_t / 2\pi R e$ y permite obtener una amplia gama de combinaciones de tensión

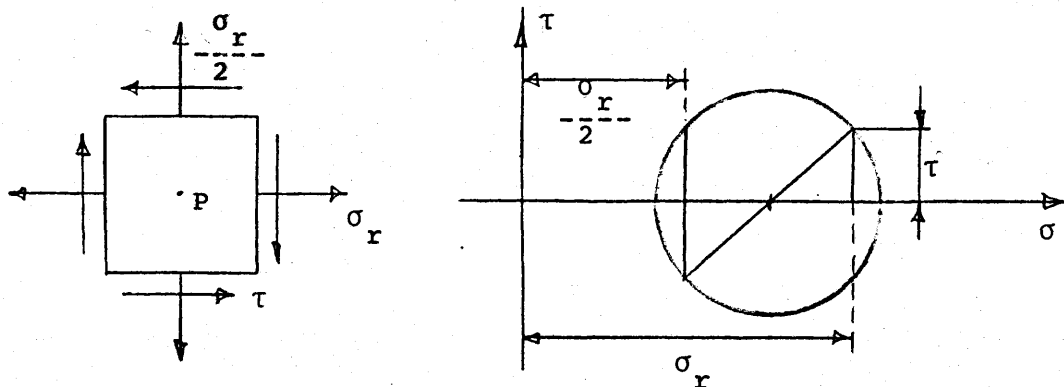


fig.- 2.31

Las tensiones principales en el punto P (vease fig2.31) en el tubo son

$$\sigma_I = \left(-\frac{\sigma_r}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_r^2}{4} + \tau^2 \right)^{1/2}$$

$$\sigma_{II} = -\frac{\sigma_r}{2} - \left(\frac{\sigma_r^2}{4} + \tau^2 \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

$$\sigma_{III} = 0$$

Por tanto

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma^2 + 6\tau^2$$

(criterio de Von Mises) que podría predecir que la plastificación se produce cuando

$$2\sigma^2 + 6\tau^2 = 2\sigma_e^2 \quad \text{ó} \quad \left(-\frac{\sigma}{\sigma_e}\right)^2 + 3\left(-\frac{\tau}{\sigma_e}\right)^2 = 1$$

En este mismo estado de tensiones se tiene que

$$\sigma_I - \sigma_{II} = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2}$$

por lo que según el criterio de Tresca la plastificación se produciría cuando se cumpliera la relación

$$(\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} = \sigma_e \quad \text{ó} \quad \left(-\frac{\sigma}{\sigma_e}\right)^2 + 4\left(-\frac{\tau}{\sigma_e}\right)^2 = 1$$

Ambas ecuaciones representan elipses en el plano σ, τ (fig 2.32)

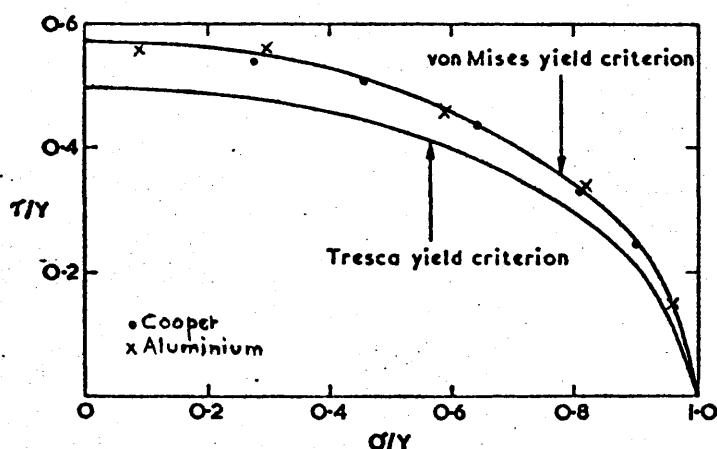


fig.- 2.32

Los datos experimentales obtenidos de esta forma se encuentran entre las dos elipses aunque generalmente más cercanos a la de Von Mises. Estas desviaciones se atribuyen generalmente al grado de anisotropía del material y a errores intrínsecos al experimento.

El experimento ya clásico de este tipo fue realizado por Taylor y Quiney que utilizaron tubos delgados de acero casi perfectamente isotrópicos. Sin embargo, todavía se observaron algunas discrepancias que no podían atribuirse a las causas anteriores. Resultados similares fueron obtenidos por Lode en 1926 y Ros y Eichinger en 1929 y Siebel en 1953 que utilizó una combinación de flexión y torsión como cargas. Los más famosos y sugerentes son los ensayos de Lode, realizados a instancias de Nadai para comparar la influencia del valor de la tensión intermedia en el comienzo de la plastificación.

Admitiendo en primera instancia el criterio de Tresca con $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{\sigma_e} = 1$$

y la tensión intermedia σ_{II} puede variar entre σ_I y σ_{III} sin producir ningún efecto sobre la plastificación. Para caracterizar esta influencia Lode introdujo el valor

$$\mu = \frac{\sigma_{II} - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}}{\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}} = \frac{2\sigma_{II} - \sigma_{III} - \sigma_I}{\sigma_I - \sigma_{III}} \quad (2.34)$$

que es el "parámetro de Lode" y varia entre $-1 < \mu < 1$. Para $\mu = 1$ $\sigma_{II} = \sigma_I$ para $\mu = -1$ $\sigma_{II} = \sigma_{III}$ y para $\mu = 0$

$\sigma_{II} = \frac{\sigma_{III} + \sigma_I}{2}$ que representa el ensayo de tensión tangencial para $\sigma_I = -\sigma_{III}$, $\sigma_{II} = 0$.

Este parámetro está relacionado con el ángulo que forma en el espacio de Haig -Westergaard el vector representativo

del estado de tensiones del punto y el eje σ_{III} , de forma que si este ángulo es θ

$$\mu = \sqrt{3} \cotg\theta \quad (2.37)$$

de forma que para $\theta = 0$ $\mu = \infty$ y por tanto $\sigma_I = \sigma_{III}$ encontramos en un ensayo triaxial de compresión, mientras que para $\theta = 60^\circ$ estamos en presencia de un ensayo triaxial de tracción.

Lode realizó sus experimentos en el rango $-1 < \mu < 1$ de forma que contuviese todos los estados desde tracción uniaxial hasta compresión uniaxial pasando por tensión tangencial pura. Los resultados de estos experimentos se muestran en la fig. 2.33. observandose que la plastificación ocurre entre las dos predicciones de Tresca y Von Mises pero más próxima a las de este último. La máxima diferencia se produce entre los dos criterios para $\mu = 0$, es decir para tensión tangencial pura en el que Von Mises predice un resultado de $\sqrt{3}/3\sigma_e = 0,577\sigma_e$ y Lode obtuvo $0,56\sigma_e$

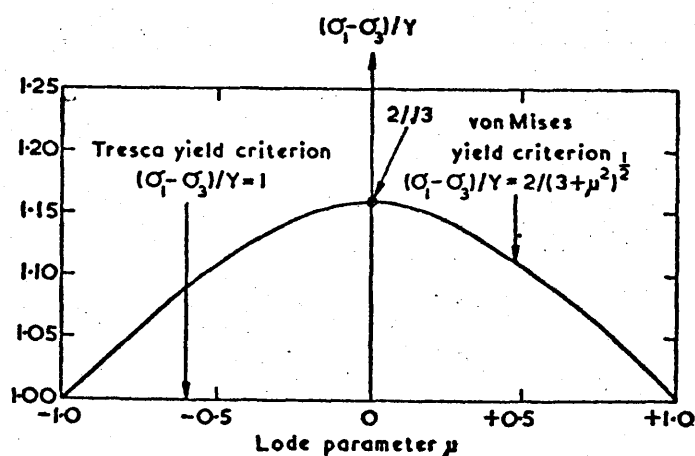


fig.- 2.33

Este ejemplo es útil por dos motivos, en primer lugar proporciona un modelo de ~~razonamiento~~ confinamiento para comparar un estado de tensiones (tangencial puro) con otro (tracción) mediante una tensión equivalente $\sigma_{\text{equiv}} = 0,56\sigma_e$ y además aporta un hecho experimental que permite contrastar los resultados obtenidos con cualquier hipótesis de equivalencia del tipo anterior.

Tanto estos resultados, como los de Bridgman ya citados y los más recientes Crosslan y Mitra (1968) han confirmado que en materiales dúctiles una presión de confinamiento no altera prácticamente los resultados iniciales, mientras que en materiales frágiles, (Bredthaver 1956) este efecto es predominante).

Existen, otros efectos importantes sobre los ensayos y sobre el comportamiento de materiales que afectan a la plastificación, tales como el tamaño, tensiones tangenciales etc (Drucker 1948) pero todos ellos suelen sacrificarse en aras de la sencillez, siempre que no afecten al resultado final de forma importante.

Ultimamente se han propuesto métodos diferentes para producir combinación de tensiones en materiales. Uno de ellos, defendido por Hill (1950) para piezas metálicas, consiste en provocar una concentración de tensiones mediante una entalladura. Midiendo la tensión de plastificación para diferentes valores del espesor ~~e~~ de la entalla se puede extrapolar al caso en que fuera un corte sin espesor, lo que en virtud de la forma de las isostáticas correspondería al caso de tritracción. Este método fue usado por Lianis y Ford (1957) y Parker y Bassett (1964).

A través de todos estos resultados, y en lo que a materiales dúctiles se refiere, el criterio de Von Mises predice la plastificación con suficiente aproximación para la mayoría de

las aplicaciones ingenieriles y no existe gran ventaja en la utilización de otro criterio matemáticamente más exacto, particularmente porque ello conlleva una mayor complejidad.

En cuanto a materiales frágiles como rocas u hormigón se han desarrollado criterios y ensayos propios que, si bien por el tema deberían tener cabida en este apartado, su importancia es tal que merecen por sí solos un capítulo, remitiendo por ello al lector al capítulo 5.7

2.6.- UN CRITERIO DE PLASTIFICACION PARA MATERIALES ANISOTROPOS

La aplicación de los criterios de Tresca o Von Mises - esta limitada a materiales isótropos aunque, como se verá en el capítulo 5, pueden extenderse a casos anisótropos. Cuando un metal se deforma plásticamente los ejes cristalográficos tienden a girar a orientaciones preferentes debidas a los mecanismos de dislocaciones o distorsión, es decir el metal tiende a incrementar su anisotropía. Todos los metales ingenieriles son anisótropos dependiendo el grado de ésta y su naturaleza del proceso de conformado y de los tratamientos térmicos y mecánicos a los que el material ha sido sometido previamente.

El efecto de la anisotropía en procesos tales como la forja, estirado o extrusión, si bien importante como fenómeno, no lo es ingenierilmente, sin embargo en el laminado las dificultades prácticas y las implicaciones económicas han hecho que se estudie este apartado concienzudamente.

Una teoria para el comportamiento de láminas metálicas fue propuesto por Jackson, Smith y Lankford en 1948 y Dam 1949. Sin embargo la más aceptada es la de Hill (1950) que supone un caso relativamente simple: la anisotropía ortótropa, es decir con ejes de direcciones preferentes o ejes principales de anisotropía situados a 90°. Los ejes pueden variar de dirección durante el proceso de deformación.

Debido a que el criterio de Von Mises se considera como el más aproximado para materiales isótropos Hill sugirió que el criterio de plastificación más simple para materiales anisótropos debia ser tal que se redujese al de Von Mises cuando la anisotropía fuese despreciable. No se admite efecto Bauschinger.

El criterio de fluencia propuesto por Hill en términos de las componentes del tensor σ_{ij} y con los ejes principales de

anisotropía coincidiendo con los ejes de referencia cartesianos_ viene dado por

$$2 f (\sigma_{ij}) \equiv F (\sigma_y - \sigma_z)^2 + G (\sigma_z - \sigma_x)^2 + H (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L \tau_{yz}^2 + 2M \tau_{xz}^2 + 2N \tau_{xy}^2 = 1 \quad (2.36)$$

donde F, G, H, L, M y N son parámetros característicos del estado de anisotropía. Se excluyen los términos lineales porque se asume que el efecto Bauschinger no existe y que la presión hidrostática no afecta a la plastificación.

Asumiendo que las tensiones de plastificación en las direcciones x y z sean σ_e^x , σ_e^y y σ_e^z puede demostrarse que los parámetros F, G y H están relacionados con estas tensiones en la forma

$$-\frac{1}{\sigma_e^x^2} = G + H$$

$$-\frac{1}{\sigma_e^y^2} = F + H$$

$$-\frac{1}{\sigma_e^z^2} = F + G$$

$$2F = \left(-\frac{1}{\sigma_e^y^2} + \frac{1}{\sigma_e^z^2} - \frac{1}{\sigma_e^x^2} \right)$$

$$2G = \left(-\frac{1}{\sigma_e^z^2} + \frac{1}{\sigma_e^x^2} - \frac{1}{\sigma_e^y^2} \right)$$

$$2H = \left(-\frac{1}{\sigma_e^x^2} + \frac{1}{\sigma_e^y^2} - \frac{1}{\sigma_e^z^2} \right)$$

La condición para que la anisotropía sea simétrica ante rotaciones sobre el eje z correspondiente a anisotropía plana en el plano xy implica que los coeficientes de la ecuación base_ deben ser invariantes y entonces

$$N = F + 2H = G + 2H$$

$$L = M$$

y para simetría esférica completa, esto es isotropía

$$L = M = N = 3F = 3G = 3H$$

que sustituidas en la ecuación la reduce a la de Von Mises

$$\begin{aligned} & (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6 (\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2) = \\ & = 6 k^2 = 1/F \end{aligned} \quad (2.37)$$

Naturalmente los parámetros son características del material y del tipo de anisotropía que éste presente.

3.- RELACIONES TENSION-DEFORMACION PLASTICA

3.1.- INTRODUCCION

Un proceso tecnológico o de diseño que implique la plastificación del material no puede llevarse a cabo racionalmente si no se dispone de una información adecuada del estado de tensiones y deformaciones del material. El objeto último de la teoría de plasticidad es determinar la historia del estado de tensiones y deformaciones en todos los puntos de un cuerpo, parcial o totalmente plastificado, cuando se especifican la historia de las cargas y desplazamientos en el contorno.

Aunque en procesos de fabricación o metalúrgicos deben considerarse grandes deformaciones, en los problemas de análisis tensional que aparecen usualmente en Resistencia de Materiales ó Cálculo de Estructuras las deformaciones son pequeñas generalmente. Por tanto la aceptación de esta hipótesis suele ser regla general.

Otra de las hipótesis que usualmente se hacen es la de material isótropo, que en general no está justificada más que por la simplificación del tratamiento numérico.

Los efectos del tiempo y la temperatura, tampoco son significativos en aplicaciones lentas de cargas a temperatura ambiente, aunque en otras circunstancias pueden ser muy importantes, por lo que se omitirán en la mayor parte de lo que sigue.

Sin embargo, la historia de carga es fundamental porque la deformación plástica es un proceso irreversible. Por ello no existe una relación biunívoca entre tensión y deformación.

La relación más simple que puede existir es entre incrementos de deformación y el estado actual de tensiones y el incremento de tensión. En general se encuentra que la relación entre los incrementos de tensión y deformación depende de la histo

ria previa completa. Esto puede ilustrarse considerando un tubo delgado a tracción y torsión como en los experimentos de Taylor y Quinney.

Consideremos la curva de plastificación inicial mostrada en la fig. 3.1. Si cargamos el material a tracción hasta un punto cuyo estado de tensiones sea superior al límite de plastificación (punto C), la nueva superficie de plastificación será ahora CDE. Descargando de nuevo el punto B y aplicando una tensión tangencial adicional de B a D en la nueva superficie de plastificación tendremos el mismo estado de tensiones, así como el mismo estado de deformaciones plásticas.

Supongamos ahora que cargamos el material a tensión cortante hasta E en la nueva superficie de plastificación y siguiendo luego un recorrido interior a EDC tal como EGD de nuevo alcanzamos el estado de tensiones D. Los estados finales de deformación plástica son obviamente distintos, aun cuando las deformaciones elásticas son iguales.

Debido a ello es necesario calcular los incrementos de deformación plástica a lo largo de la historia y obtener el total por suma de todos estos incrementos. Sin embargo existe al menos una clase importante de trayectorias de carga para las cuales las deformaciones plásticas son independientes de ellas y dependientes solo del estado final de tensiones. Son las llamadas trayectorias de carga proporcional para las cuales todas las tensiones se incrementan en forma lineal.

Para la consecución de estas relaciones existen tres puntos de vista diferentes:

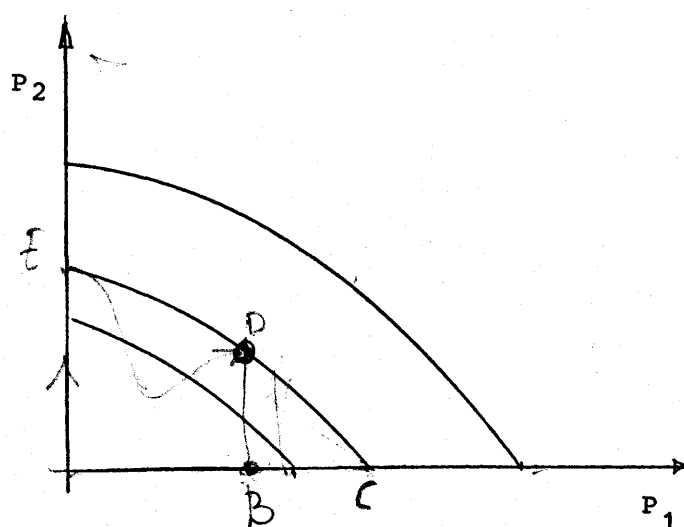


fig.- 3.1

1.- Los estudios más básicos del problema hacen uso de los conceptos y métodos de la física del sólido. En esta aproximación se tiene en cuenta la microestructura del material y se intenta predecir el comportamiento mecánico de los materiales a través de esta información. Tratamientos del tema desde este punto de vista pueden encontrarse en los libros de Cottrell y Read y Frank.

2.- Es posible también adoptar la hipótesis de medio continuo; se aplican entonces los principios generales de la mecánica y termodinámica del continuo para determinar las relaciones tensión-deformación que son compatibles con estos principios.

3.- El procedimiento más directo consiste en el planteamiento de relaciones simples que sirvan, de acuerdo con los resultados experimentales, para definir el comportamiento de algunos materiales similares (vg. metales). Este es el punto de vista adoptado por Drucker, Prager, Hodge y Hill entre otros.

Aunque se ha hecho un considerable progreso en las dos primeras direcciones descritas, hasta ahora solo la última ha proporcionado información de utilidad directa al analista o inge

niero. Las relaciones tensión-deformación adoptadas en este caso son suficientemente simples para determinar el comportamiento de cuerpos ideales bajo muchos de tipos de condiciones de carga. Naturalmente en este capítulo se discuten las relaciones desde esta tercera perspectiva.

En los cuatro epígrafes siguientes se tratan aspectos generales de las relaciones tensión-deformación, para a continuación pasar a la forma que toman éstas según las teorías más reconocidas, y según los criterios de plastificación elegidos.

Se termina el capítulo con unas breves notas sobre las relaciones para cuerpos anisótropos y con las expresiones que para cuerpos plásticos toman las ecuaciones y teoremas de campo ya explicadas en el capítulo I para el caso elástico.

3.2.- POSTULADOS DE DRUCKER. DEFINICION DE RIGIDIZACION POR DEFORMACION.

Las ecuaciones básicas de flujo plástico pueden deducirse a partir de hipótesis como la conocida ley que establece que los ejes principales del incremento de deformación plástica coinciden con los ejes principales del estado actual de tensiones. Sin embargo, es mucho más satisfactorio obtener las leyes de plastificación a partir de hipótesis elementales relativas a alguna ley de conservación, como propuso Drucker.

Para comenzar este estudio son necesarias las definiciones de endurecimiento (rigidización) por deformación y material estable.

Como se indicó, prácticamente todos los metales presentan de forma muy pronunciada el efecto Bauschinger por lo que cualquier isotropía inicial en cuanto a compresión y tracción es destruida después de la deformación plástica.

Este efecto de cambio de la superficie de plastificación debido a las deformaciones plásticas es lo que se denomina rigidización por deformación ó endurecimiento por trabajo (work-hardening en la literatura anglosajona). Esta es la causa de que sea necesario un tratamiento incremental de la plasticidad, ya que no existe una relación tensión-deformación plástica independiente de la trayectoria de tensiones recorrida.

Este hecho es importante en el sentido de que para conseguir una mayor deformación plástica en materiales con rigidización es necesaria la aplicación de una tensión superior (vease fig. 3.2), o lo que es igual si mantenemos la tensión (despreciando otros efectos como la temperatura) la deformación plástica

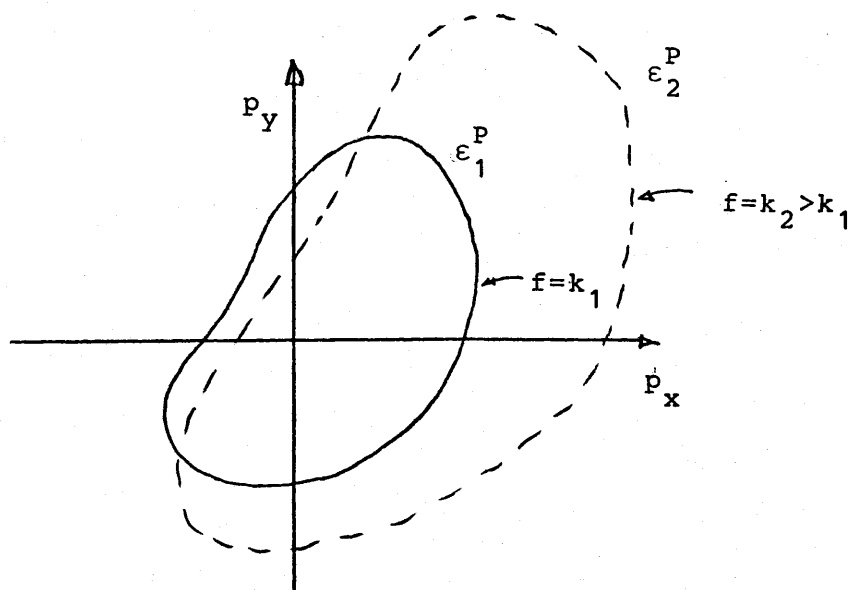


fig.- 3.2,

ca no varia. Un diagrama tensión-deformación de un material rigidizable representa pues una serie de estados en equilibrio y el material se denomina estable (Drucker 1951).

El fenómeno del límite elástico superior en aceros dulces, así como el comportamiento que sufren algunos materiales en determinadas circunstancias y el reblandecimiento por deformación (strain-softning) se caracteriza porque es posible aumentar la deformación disminuyendo la tensión (vease fig. 3.3.b), siendo ejemplos de inestabilidad. No es este el caso de la estricción en aceros, a pesar de la primera impresión que puede sacarse a la vista de la curva tensión nominal-deformación, ya que si bien la tensión inicial \bar{F} efectivamente disminuye, no ocurre así con la tensión real \bar{F}^A que sigue aumentando. La interpretación de la estricción \bar{F}^A como un fenómeno de inestabilidad está recogida en numerosos textos. (vg: Crandall et al.). El material caracterizado por la fig. 3.3.a es rigidizable y, por tanto, estable; en él, un incremento positivo de tensión $d\sigma > 0$ produce un incremento adicional de deformación $d\epsilon > 0$. El trabajo realizado por la tensión adicional viene dado por

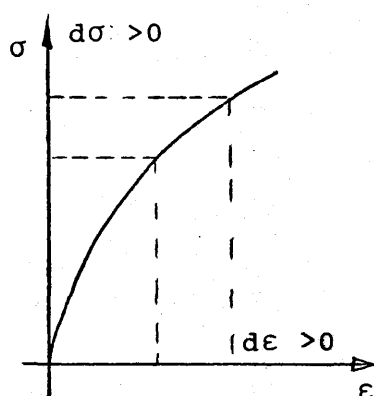


fig.-3.3a

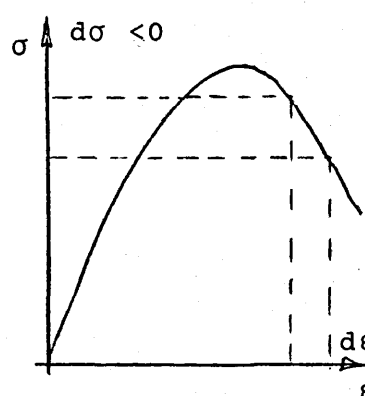


fig.-3.3b

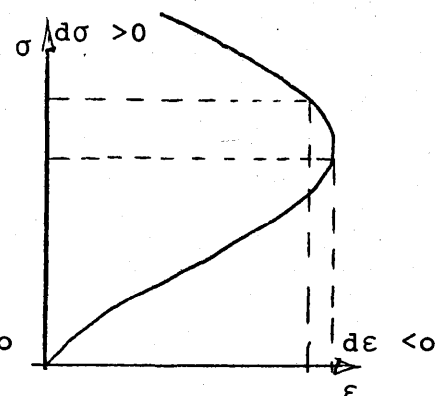


fig.-3.3c

$$dW = \int_{\sigma_0}^{\sigma_0 + d\sigma} \sigma \, d\epsilon > 0$$

y, es siempre mayor que cero y viene representado por el area sombreada en el la fig.3.3. a.

La fig.3.3.b representa la curva característica de un material inestable y para $d\epsilon > 0$ puede ocurrir que $d\sigma < 0$ siendo el trabajo realizado negativo en esta zona de inestabilidad.

En el caso de la fig.3.3 c. la deformación decrece cuando aumenta la tensión ($d\epsilon < 0$ $d\sigma > 0$) siendo el trabajo de nuevo - negativo.

A partir de estas ideas iniciales podemos ya enunciar los postulados de Drucker:

Sea un elemento con rigidización estable sujeto a un estado inicial de tensiones σ_{ij}^* . Debido a algún agente externo este estado se modifica a σ_{ij} que se encuentra en la superficie de plastificación, a través de una trayectoria integralmente contenida en el interior de la superficie de plastificación (fig. 3.4), por lo que hasta ese momento el material solo ha sufrido deformación elástica. En este estado si se somete a un $d\sigma_{ij} < 0$ volvería a entrar en la zona elástica, pero si aplicamos $d\sigma_{ij} > 0$ y suponemos que este cambio se produce muy lentamente de forma que pueda considerarse un proceso isoterma, los postulados de Drucker pueden enunciarse así

1.- Durante el proceso de carga el incremento adicional de tensiones produce un trabajo positivo.

2.- Para un material rigidizable y un ciclo de carga, consistente en la aplicación y posterior eliminación de las tensiones adicionales, el trabajo neto realizado es positivo si se produce deformación plástica y es cero cuando la deformación es exclusivamente elástica.

Estos postulados pueden expresarse en forma matemática de un modo simple.

Sea Σ la superficie inicial de plastificación (fig. 3.4) y realizamos una trayectoria de carga $A \rightarrow B \rightarrow C$. El estado inicial de tensiones σ_{ij}^* coincide con el punto que se encuentra en el interior de la superficie de plastificación, es decir en estado elástico. El punto B representa el estado σ_{ij} que se encuentra en la superficie de plastificación. Un incremento diferencial $d\sigma_{ij}$ produce un cambio $B \rightarrow C$ y un incremento de deformación $d\epsilon_{ij}$, parte del cual está compuesto por deformación elástica, y otra parte por deformación plástica $d\sigma_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p$. La superficie de plastificación siguiente es Σ' .

Supongamos ahora que el incremento de tensión $d\sigma_{ij}$ es eliminado de forma que el material se descarga y vuelve al punto A a través de otra trayectoria arbitraria $C \rightarrow A$. En este proceso la deformación elástica producida de A a C se recupera totalmente, mientras que el incremento de deformación plástica $d\epsilon_{ij}^p$ es irreversible. El trabajo total realizado durante el ciclo es

$$W_{total} = \int_A^B \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij}^e + \int_B^C \sigma_{ij} (\delta\epsilon_{ij}^e + \delta\epsilon_{ij}^p) + \\ + \int_C^A \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij}^e = \oint \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij}^e + \int_B^C \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij}^p$$

Pero la integral extendida a la deformación elástica es nula, pues ésta es totalmente recuperable. Por ello

$$W_{total} = \int_B^C \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij}^p \quad \text{y} \quad \delta\sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.2)$$

según el segundo postulado de Drucker que se suele denominar algunas veces condición de unicidad, o principio del máximo local.

El primero de los postulados es todavía más simple de enunciar o de entender

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p > 0 \quad (3.3)$$

que implica la realización de un trabajo positivo para la realización de una deformación en un material estable (vease fig. 3.3.a).

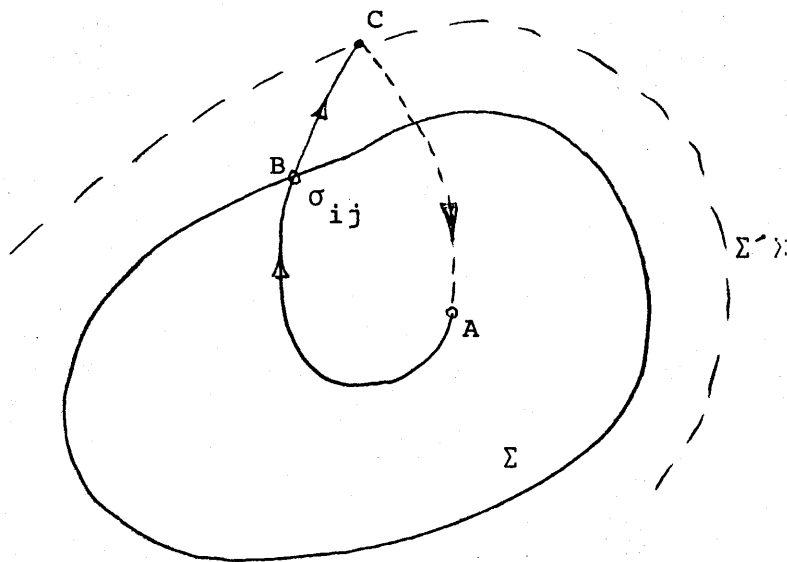


fig.- 3.4

De estos postulados se deducen por otra parte una serie de consecuencias que vamos a estudiar a continuación

3.3.- DERIVACION GENERAL DE LAS RELACIONES TENSION-DEFORMACION PLASTICA.

Para obtener las relaciones tensión-deformación plástica es necesario la definición de dos hipótesis fundamentales, además de la consideración de materiales estables.

1.- Para cada estado de deformación plástica existe una función de carga que depende del estado actual de tensiones y de la historia de deformación del material

$$f(\sigma, \epsilon, \lambda)$$

2.- Existe una relación lineal entre el incremento de deformación plástica y el incremento de tensión

$$d\epsilon_{ij}^p = C_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (3.4)$$

Aunque esta ecuación parece razonable, debe hacerse notar que no existe ninguna justificación teórica para ella, sino solamente una hipótesis cómoda. Aunque C_{ijkl} puede ser función de las tensiones, deformaciones y de la trayectoria de carga, la ecuación (3.4) implica que es independiente de $d\sigma_{kl}$.

La primera hipótesis implica que para que se produzca deformación plástica es necesario que ocurra alguno de los dos casos siguientes

$$df(\sigma_{ij}) > 0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$$

(3.5)

y de la hipótesis 2 de linealidad se deduce que el principio de superposición puede aplicarse entre incrementos de tensión y deformación, es decir si $d\sigma'_{ij}$ y $d\sigma''_{ij}$ son dos incrementos de tensión que producen incrementos de deformación plástica $d\varepsilon'^P_{ij}$ y $d\varepsilon''^P_{ij}$ respectivamente, el incremento $d\sigma_{ij} = d\sigma'_{ij} + d\sigma''_{ij}$ producirá un incremento $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon'^P_{ij} + d\varepsilon''^P_{ij}$.

Supongamos ahora que para un estado de tensiones σ_{kl} dado, un incremento de tensiones $d\sigma_{kl}$ produce plastificación. Este incremento $d\sigma_{kl}$ puede descomponerse en dos partes $d\sigma'_{kl}$ y $d\sigma''_{kl}$ tal que $d\sigma'_{kl}$ no produzca plastificación es decir

$$-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma'_{kl} \leq 0$$

y tomando la situación extrema $d\sigma'_{kl}$ es perpendicular a $-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$, - gradiente de la función f , que tiene la dirección de la normal a la superficie de plastificación, con lo que $d\sigma'_{kl}$ tiene la dirección de la tangente a la superficie en el punto σ_{kl} . De acuerdo con ello $d\sigma''_{kl}$ es normal a la superficie, es decir.

$$d\sigma''_{kl} = a -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$$

donde a es un escalar positivo.

Geométricamente esto significa la descomposición del vector $d\sigma_{kl}$ en sus componentes normal y tangencial a f en el punto σ_{kl} ($d\sigma'_{kl} = d\sigma^t_{kl}$; $d\sigma''_{kl} = d\sigma^n_{kl}$)

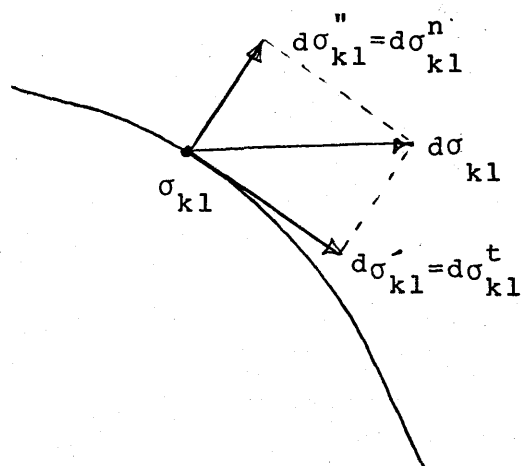


fig.- 3.5

Por tanto se tiene que

$$-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} (d\sigma_{kl}^t + d\sigma_{kl}^n) = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}^n = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} a - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$$

y despejando

$$a = \frac{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} d\sigma_{kl} \quad (3.6)$$

probando esta ecuación que la descomposición es posible.

Si comparamos esta ecuación (3.6) con la (3.4) se puede ver que cada componente de $d\epsilon_{ij}^p$ es proporcional a "a" en la forma

$$d\epsilon_{ij}^p = h_{ij} a = g_{ij} -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = g_{ij} df \quad (3.7)$$

donde g_{ij} es un tensor simétrico.

Estos g_{ij} son pues funciones del estado actual de tensiones y de la historia de deformación del material pero no del incremento de tensión. El significado físico de esta última hipótesis es importante: la dirección del vector $d\epsilon_{ij}^p$ depende exclusivamente de la tensión actual y no del incremento de tensión - que lo produce, que solo implica la magnitud del vector.

Esta hipótesis viene sugerida por la siguiente consideración física. En un grano cristalino se produce un incremento de deformación plástica por una combinación de deslizamientos a lo largo de ciertas direcciones de cizalla que dependen de la orientación del grano y de la carga exterior impuesta. Para que se produzca es necesario alcanzar un estado de tensiones y como promedio en todo el material, un estado macroscópico de tensiones. El incremento de tensiones juega solo en la magnitud de esta deformación. Todas las determinaciones experimentales como se muestran en el epígrafe se han llevado a cabo bajo condiciones donde el efecto del incremento de tensión sea despreciable. Consecuentemente y hasta el momento presente, la evidencia experimental demuestra que la influencia del incremento de tensión en la dirección de $d\epsilon_{ij}^p$ es despreciable.

El tensor g_{ij} debe satisfacer dos condiciones:

1.- la restricción de que el cambio de volumen debido a deformación plástica es nulo implica que $g_{ii} = 0$.

2.- los ejes principales del tensor incremento de deformación plástica y de g_{ij} por tanto deben coincidir con los ejes principales de tensiones, ya que el elemento es isótropo.

Trataremos ahora de determinar la dirección de g_{ij} . El segundo postulado de Drucker es

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p = (d\sigma_{ij}^t + d\sigma_{ij}^n) d\epsilon_{ij}^p \geq 0$$

Pero $d\sigma_{ij}^t$ no produce plastificación por lo que el incremento $d\sigma_{ij} = C d\sigma_{ij}^t + d\sigma_{ij}^n$ para cualquier valor de C positivo o negativo conduce a la misma deformación plástica $d\epsilon_{ij}^p$, pudiéndose escribir la condición de unicidad para este nuevo incremento en la forma

$$(C d\sigma_{ij}^t + d\sigma_{ij}^n) d\epsilon_{ij}^p \geq 0$$

Pero $d\sigma_{ij}^t d\epsilon_{ij}^p$ debe ser cero, ya que en caso contrario podría elegir C tan grande en valor absoluto y con signo contrario a $d\epsilon_{ij}^p$, de forma que este producto fuese negativo, por lo que

$$d\sigma_{ij}^t d\epsilon_{ij}^p = d\sigma_{ij}^t g_{ij} df = 0$$

Pero $df > 0$ por tanto

$$d\sigma_{ij}^t g_{ij} = 0$$

por lo que g_{ij} ha de tener la dirección de la normal a f pudiendo escribirse en la forma

$$g_{ij} = G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.8)$$

donde G es un escalar que depende de nuevo del estado de tensiones, y de la historia de cargas y deformaciones. Sustituyendo (3.8) en (3.7)

$$d\epsilon_{ij}^p = G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.9)$$

que es la relación tensión-deformación plástica general, consistente con las hipótesis iniciales.

Resumiendo podemos decir que, comenzando con la definición de estabilidad de Drucker y los postulados que se derivan, así como dos hipótesis adicionales de plastificación y linealidad entre incrementos de tensión y de deformación plástica, se puede llegar a una regla general de plastificación para un material rigidizable. Puede verse también que el vector incremento de deformación plástica debe tener la dirección normal a la superficie de plastificación, constituyendo esto lo que se denomina regla de la normalidad, viniendo cada criterio diferente asociado a una regla de flujo diferente.

El escalar $d\lambda$ depende del estado de tensiones, de la historia de carga y de deformaciones, y debe calcularse experimentalmente dependiendo su expresión del tipo de material considerado.

3.4.- POTENCIAL PLASTICO. LEYES DE FLUJO ASOCIADAS Y NO ASOCIADAS.

En el epígrafe anterior se ha llegado a una expresión en la que el incremento de deformación plástica venía dado por el producto de un escalar por un vector en la dirección del gradiente de la superficie de plastificación, particularizado para el estado de tensiones que nos encontramos.

Sin embargo, esta relación se ha obtenido partiendo de dos hipótesis iniciales, y de los dos postulados de Drucker. Es instructivo prescindir de estos últimos y generalizar los resultados.

En lo que sigue utilizaremos notación matricial, y, entre parentesis, notación indicial. Por último haremos notar, de nuevo, la identidad de los símbolos $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ y $d\epsilon_{ij}^p$.

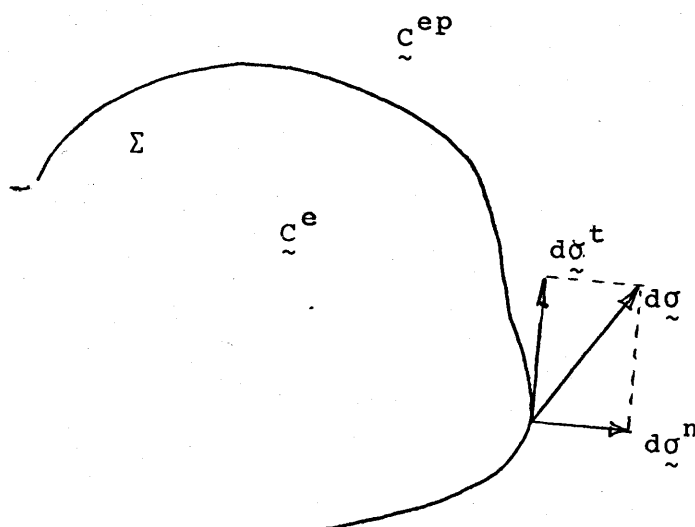


fig.- 3.6

Sea C^e la matriz de comportamiento en el campo elástico

$$\dot{\epsilon}^e = C^e \dot{\sigma} \quad (d\epsilon_{ij}^e = C_{ijkl} d\sigma_{kl}) \quad (3.10)$$

y $\underline{\underline{C}}^{ep}$ la matriz de comportamiento en el campo elastoplástico cuya forma se pretende analizar.

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{ep} = \underline{\underline{C}}^{ep} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (d\epsilon_{ij}^{ep} = C_{ijkl}^{ep} d\sigma_{kl}) \quad (3.11)$$

La deformación elastoplástica se supone separable en las partes plástica y elástica; lo que implica la existencia de la frontera f dentro de la cual $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = 0$

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{ep} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \underline{\underline{C}}^{ep} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}^e \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{C}}^p \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = (\underline{\underline{C}}^e + \underline{\underline{C}}^p) \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (3.12)$$

con lo que podemos considerar $\underline{\underline{C}}^{ep} = \underline{\underline{C}}^e + \underline{\underline{C}}^p$.

Si ahora descomponemos el incremento de tensión en sus componentes según la normal a la superficie de plastificación $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^n$ y la tangente $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^t$ (fig. 3.6) y tenemos en cuenta la hipótesis de linealidad:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e &= \underline{\underline{C}}^e \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^n + \underline{\underline{C}}^e \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^t & (d\epsilon_{ij}^e &= C_{ijkl}^e d\sigma_{kl}^n + C_{ijkl}^e d\sigma_{kl}^t) \\ \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{ep} &= \underline{\underline{C}}^{ep} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^n + \underline{\underline{C}}^{ep} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^t & (d\epsilon_{ij}^{ep} &= C_{ijkl}^{ep} d\sigma_{kl}^n + C_{ijkl}^{ep} d\sigma_{kl}^t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

En un caso de carga neutra $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^n = 0$. Pero este caso puede considerarse límite de un proceso de carga o de un proceso de descarga y, parece razonable, suponer continuidad, es decir

$$\underline{\underline{C}}^e \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^t = \underline{\underline{C}}^{ep} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^t \quad (C_{ijkl}^e d\sigma_{kl}^t = C_{ijkl}^{ep} d\sigma_{kl}^t) \quad (3.14)$$

y sustituyendo en (3.13)

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\sim}^{ep} &= c_{\sim}^{ep} \dot{\sigma}_{\sim}^n + c_{\sim}^e \dot{\sigma}_{\sim}^t = c_{\sim}^{ep} \dot{\sigma}_{\sim}^n + \dot{\varepsilon}_{\sim}^e - c_{\sim}^e \dot{\sigma}_{\sim}^n = \dot{\varepsilon}_{\sim}^e + (c_{\sim}^{ep} - c_{\sim}^e) \dot{\sigma}_{\sim}^n \\ \dot{\varepsilon}_{\sim}^{ep} &= \dot{\varepsilon}_{\sim}^e + c_{\sim}^p \dot{\sigma}_{\sim}^n \quad \dot{\varepsilon}_{\sim}^p = c_{\sim}^p \dot{\sigma}_{\sim}^n \quad (d\varepsilon_{ij}^p = c_{ijkl}^p d\sigma_{kl}^n)\end{aligned}\quad (3.15)$$

y expresando $\dot{\sigma}_{\sim}^n$ como su módulo por el vector unitario de la dirección de la normal tendremos

$$\dot{\varepsilon}_{\sim}^p = c_{\sim}^p \cdot n_{\sim} (\dot{\sigma}_{\sim}^n \cdot n_{\sim}) \quad (d\varepsilon_{ij}^p = c_{ijkl}^p \cdot n_{kl} (d\sigma_{mn}^n n_{mn})) \quad (3.16)$$

$c_{\sim}^p \cdot n_{\sim}$ es un vector que se puede escribir en la forma

$$c_{\sim}^p \cdot n_{\sim} = 1/h \cdot m_{\sim}$$

Con lo que

$$\dot{\varepsilon}_{\sim}^p = 1/h \cdot m_{\sim} (\dot{\sigma}_{\sim}^n \cdot n_{\sim}) \quad (d\varepsilon_{ij}^p = 1/h \cdot m_{ij} (d\sigma_{mn}^n \cdot n_{mn})) \quad (3.17)$$

m_{\sim} no tiene por qué coincidir con n_{\sim} por lo que en general la ley de flujo no seguirá la regla de la normalidad. Esta se cumplirá cuando

$$c_{\sim}^p \cdot n_{\sim} = 1/h \cdot n_{\sim} \quad (c_{\sim}^p - 1/h I) n_{\sim} = 0 \quad (3.18)$$

es decir cuando el módulo de $c_{\sim}^p \cdot n_{\sim}$ sea un autovalor de la matriz c_{\sim}^p .

De nuevo si $m_{\sim} = n_{\sim}$ se tendrá que

$$n_{ij} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}} \quad (3.19)$$

y sustituyendo en la ecuación

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{h} \frac{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\sqrt{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}} \frac{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}}{\sqrt{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}} \quad (3.20)$$

expresión idéntica a la (3.9) donde

$$d\lambda = \frac{1}{h} \frac{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}}{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} \quad (3.21)$$

La ley de plastificación que se obtiene cuando $\mu = \mu_0$ es decir cuando se cumple la regla de normalidad se denomina asociada a la superficie de plastificación o simplemente "asociada", mientras que en caso contrario ($\mu \neq \mu_0$) se denomina "no asociada".

En este último caso puede considerarse μ como vector normal a una cierta función $g(\rho)$ escalar, de forma que

$$\mu = \frac{-\frac{\partial g}{\partial \rho}}{\sqrt{-\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\partial g}{\partial \rho}}} \quad (3.22)$$

Esta función si existe se denomina "potencial plástico" ya que el incremento de deformación plástica en cada instante tiene la dirección de la normal a esa función en el estado de tensiones en que se encuentre el material.

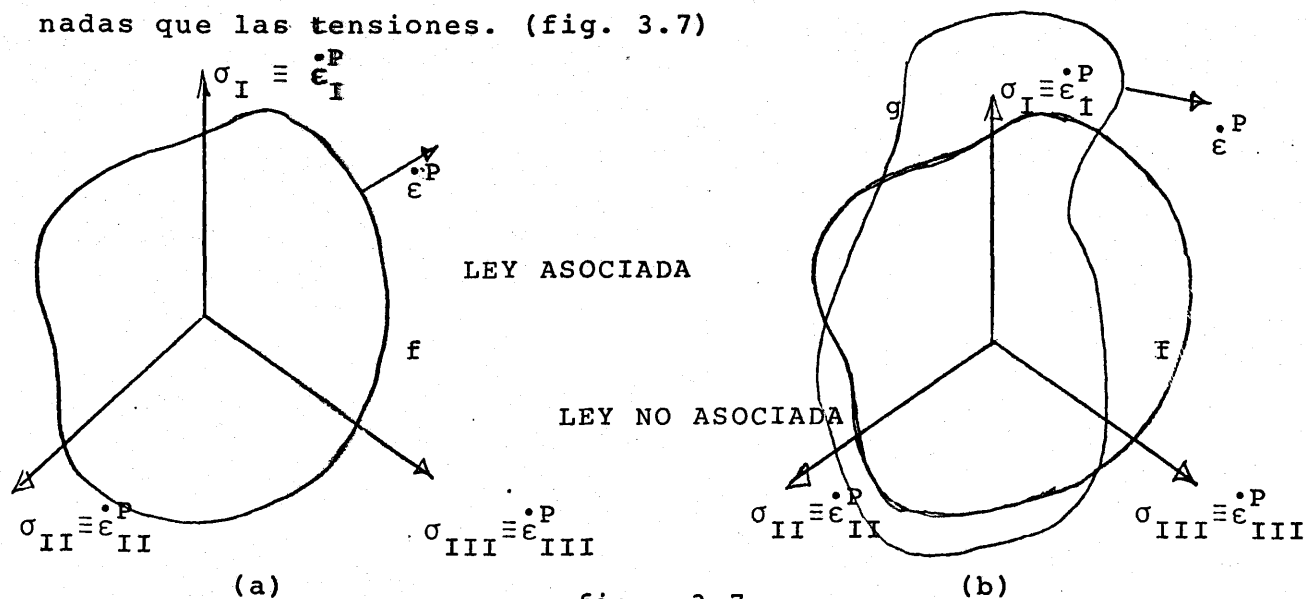
En el caso asociado $\eta = \eta$ y $g \equiv f$, es decir la superficie de plastificación representa justamente el potencial plástico.

Este concepto de potencial plástico fue introducido por Melan [22], basandose en la hipótesis de existencia de g (g) tal que

$$d\epsilon_{ij}^p = - \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (3.23)$$

donde $d\lambda$ debe ser una constante, de forma que si siempre es positiva (material rígidamente estable) se demuestra (Bland 1957) que $g \equiv f$.

Este potencial plástico debe ser necesariamente una función simétrica de los tres invariantes de tensiones en un material isótropo para que se mantenga la isotropía en las deformaciones plásticas. Del mismo modo es posible demostrar que g debe ser una función par de las tensiones y por tanto de J_3' , teniendo por tanto las mismas propiedades que ostentaba la función f y siendo representable de forma fácil en el espacio de Haig-Westergaard, usando para las deformaciones plásticas las mismas coordenadas que las tensiones. (fig. 3.7)

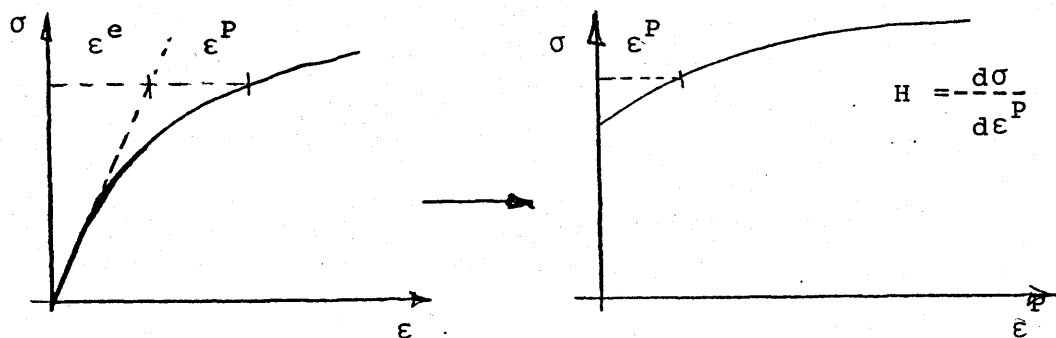


El significado físico de h en el caso asociado se obtiene multiplicando (3.17) por sí misma, con lo que

$$h^2 = \frac{(\dot{\sigma} \cdot \dot{n})^2}{\dot{\epsilon}^p \cdot \dot{\epsilon}^p} \quad h = \frac{\dot{\sigma}_n}{\sqrt{\dot{\epsilon}^p \cdot \dot{\epsilon}^p}} = \frac{d\sigma_n}{d||\epsilon||}$$

donde $||$ indica "norma".

h es proporcional al módulo plástico en el diagrama σ , ϵ^p del ensayo de tracción



En el caso de la superficie de Von Mises

$$f = 1/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - k^2 = 0$$

con

$$\sigma_e = \sqrt{3/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad y \quad \epsilon_{eq}^p = \sqrt{2/3 \epsilon_{ij}^p \epsilon_{ij}^p}$$

$\sigma_{eq} \rightarrow \sigma_n$ y $\epsilon_{eq}^p \rightarrow \epsilon_n$ en el caso de tracción simple.

Como

$$-\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_e} d\sigma_e = 2/3 \sigma_e d\sigma_e$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = 1/h \frac{2/3 \sigma_e d\sigma_e}{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \sigma'_{ij} = 1/h d\sigma_e / \sigma_e \sigma'_{ij} \Rightarrow \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} = 1/h d\sigma_e \sqrt{2/3}$$

$$h = \frac{d\sigma_e}{\sqrt{3/2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}} = 2/3 d\sigma_e / d\epsilon_e$$

3.5.- CONVEXIDAD DE LA SUPERFICIE DE PLASTIFICACION

Como una deducción inmediata de los postulados de Drucker se obtiene la convexidad de la superficie de plastificación ya indicada anteriormente.

Sea de nuevo el ciclo representado en la fig.3.4 donde el trabajo total realizado en el ciclo es

$$dW = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^P + d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P$$

que representa la suma de dos productos escalares, el de $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$ y $d\epsilon_{ij}^P$ y el de $d\sigma_{ij}$ y $d\epsilon_{ij}^P$.

Por la condición de unicidad sabemos que

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P \geq 0$$

y

$$|d\sigma_{ij}| |d\epsilon_{ij}^P| \cos\theta \geq 0 \longrightarrow -\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (3.24)$$

es decir los vectores $d\sigma_{ij}$ y $d\epsilon_{ij}^P$ deben formar un ángulo agudo. De una forma análoga, si ψ es el ángulo formado por los vectores $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$ y $d\epsilon_{ij}^P$ este también tiene que ser agudo para todos los valores de σ_{ij}^* , ya que siempre podríamos escoger $d\sigma_{ij}$ tan pequeño que el trabajo realizado por $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$ fuese mayor al realizado por $d\sigma_{ij}$ y como por el segundo postulado de Drucker el trabajo total realizado en un ciclo es no negativo tendremos efectivamente que $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^P \geq 0$ y ψ es agudo. De aquí que todos los valores σ_{ij}^* deben encontrarse en un semiespacio limitado por un plano perpendicular a $d\epsilon_{ij}^P$, y como ésta según la regla de la normalidad, tiene la dirección de la normal exterior a la superficie, todo estado de tensiones σ_{ij}^* representativo de un estado elástico se encontrará en el interior del semiespacio limita

do por el plano tangente a la superficie , o lo que es igual la superficie de plastificación es convexa. (fig. 3.8.b)

De otra forma, si la superficie no fuera convexa, existiría algún vector $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$ que formase un ángulo obtuso con el vector $d\sigma_{ij}$ (vease fig. 3.8.c), cosa imposible según hemos visto anteriormente, lo que completa la prueba de convexidad.

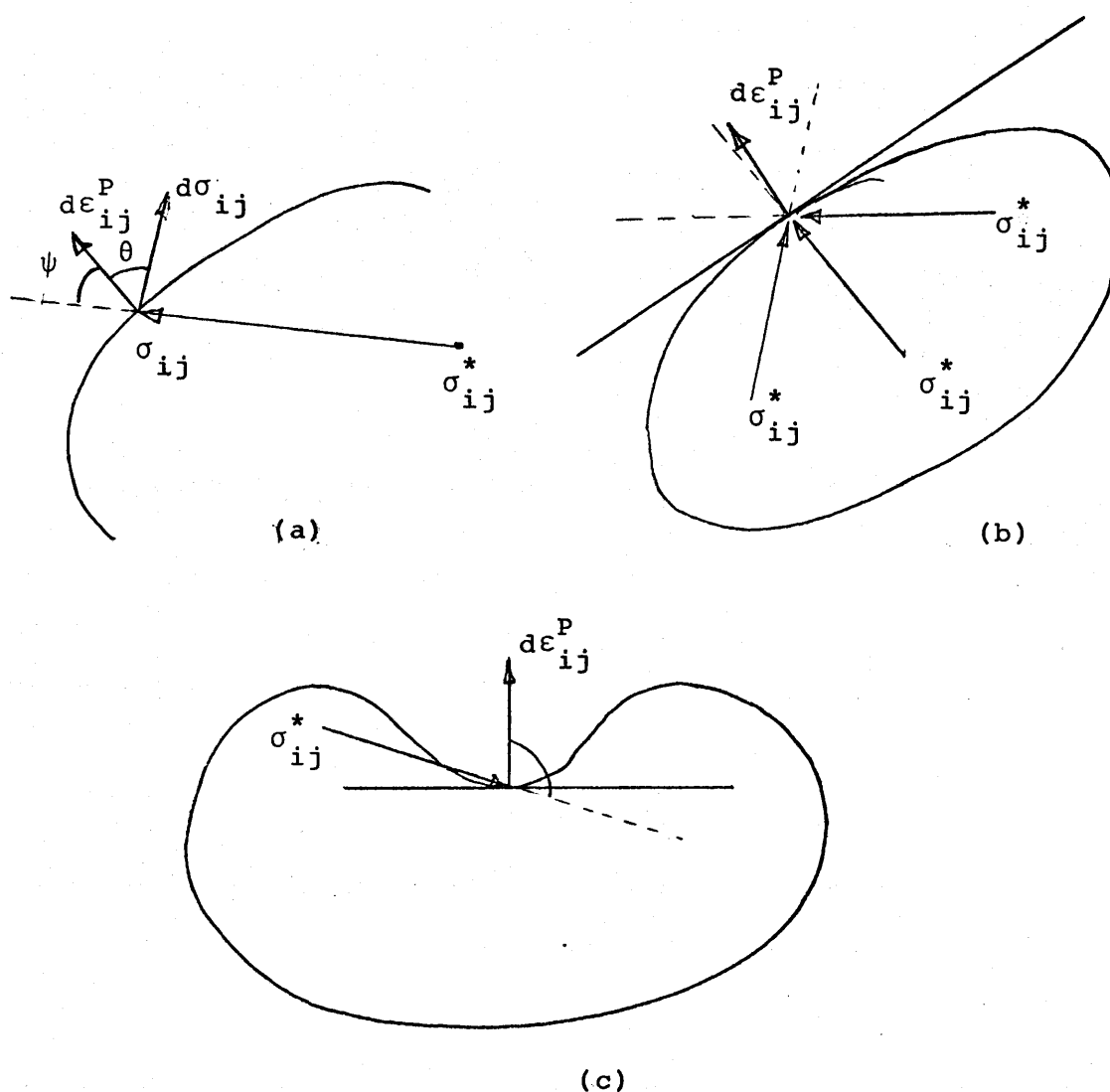


fig.- 3.8

Un caso importante también es el del cuerpo plástico perfecto donde se cumple que $d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p = 0$ pues no se produce incremento de tensión cuando hay aumento en la deformación plástica. Con ello $d\sigma_{ij}$ es perpendicular a $d\epsilon_{ij}^p$ lo que significa para una ley de flujo asociada, que $d\sigma_{ij}$ tiene la dirección de la tangente a la superficie de plastificación, no existiendo rigidización. Como sigue cumpliéndose que $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^p \geq 0$ la superficie también es convexa.

3.6.- ECUACIONES DE LEVY-MISES Y PRANDTL-REUSS

Las primeras especulaciones teóricas acerca de las relaciones tensión y deformación fueron expuestas por Saint Venant en 1870, con el tratamiento de la deformación plana en estado plástico. Con una gran intuición física Saint Venant propuso que los ejes principales del incremento de deformación (y no de la deformación total) coincidían con los ejes principales de las tensiones. Saint Venant no discutió la dependencia del parámetro de Lode en estas relaciones en deformación plana.

Una primera relación entre la dirección del vector incremento de deformación plástica y el vector tensión para el caso tridimensional fue propuesta independientemente por Levy en 1871. Este trabajo de Levy permaneció desconocido durante largo tiempo fuera de su propio país, hasta que las mismas ecuaciones fueron sugeridas por Mises en 1913. Las ecuaciones de Levy-Mises que son ampliamente conocidas y utilizadas en plasticidad clásica pueden expresarse en la forma

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \sigma'_{ij} \quad (3.25)$$

donde $d\lambda$ es un escalar no negativo para materiales estables que dependen del estado de tensiones y de la historia de carga y σ'_{ij} es el desviador de tensiones.

En estas ecuaciones son los incrementos de deformación total los que se suponen proporcionales al desviador, por lo que estas ecuaciones son estrictamente aplicables solamente a un material ficticio en el que las deformaciones elásticas sean nulas, o lo que es igual un material con módulo de Young infinito, permaneciendo pues indeformable durante la descarga. Es por ello que estas ecuaciones solo pueden aplicarse estrictamente a problemas rígido plásticos o, de forma apropiada, a aquellos casos en que las deformaciones elásticas sean despre-

ciables frente a la magnitud tomada por las plásticas.

La extensión de las ecuaciones de Levy-Mises al campo elásto-plástico fue llevada a cabo por Prandtl (1924) para el problema plano y completada de forma general por Reuss (1930), siendo actualmente conocidas como ecuaciones de Prandtl-Reuss.

Reuss admitió que los incrementos de deformación "plástica" en cualquier instante de carga son proporcionales al tensor desviador de tensiones.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma'_{ij} \quad (3.26)$$

En otras palabras que el incremento de deformación plástica tiene la dirección del tensor desviador independiente del incremento de tensión aplicada, lo que implica que los ejes principales de tensiones y de incremento de deformación plástica coinciden (los ejes principales de tensiones coinciden con los del tensor desviador).

Esta ecuación da la dirección de $d\epsilon_{ij}^p$ pero no su magnitud; para obtenerla es necesario utilizar un criterio de plastificación, y la determinación posterior del escalar $d\lambda$. Supongamos, como de hecho sucede en las ecuaciones de Prandtl-Reuss, que se utiliza el criterio de Von Mises.

$$J_2' = 1/3 \sigma_e^2 \quad 1/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 1/3 \sigma_e^2 \quad (3.27)$$

Si multiplicamos la ecuación (3.27) por sí misma y ambos miembros por 1/2 tendremos.

$$1/2 d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p = (d\lambda)^2 1/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = (d\lambda)^2 J_2' \\ J_2^{\dot{\epsilon}^p} = (d\lambda)^2 J_2' \quad (3.28)$$

y de aquí podemos deducir $d\lambda$

$$d\lambda = \sqrt{\frac{J_2 \dot{\epsilon}^p}{J_2'}} \quad (3.29)$$

A veces también se suele definir una tensión equivalente, así como un incremento de deformación plástica equivalente - y poner $d\lambda$ en función de ellos.

Definiendo en la forma

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2'} \quad (3.30)$$

$$d\epsilon_{eq}^p = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2 \dot{\epsilon}^p} \quad (3.31)$$

quedará

$$d\lambda = -\frac{3}{2} \frac{d\epsilon_{eq}^p}{\sigma_e} \quad (3.32)$$

Para un ensayo de tracción la tensión equivalente y la deformación plástica equivalente representan respectivamente la tensión de tracción y la deformación plástica producida, siendo por tanto evidente la conveniencia de la definición anterior que nos volveremos a encontrar.

Este $d\lambda$ es pues obtenible experimentalmente en un ensayo de tracción para un material plástico perfecto, ya que en caso contrario y como indicamos $d\lambda$ dependerá de otra serie de magnitudes.

Si comparamos la tensión equivalente con la aparecida en el criterio de Von Mises (ec. 3.30) vemos que precisamente representa la tensión de plastificación, a partir de la cual se produce ésta. En definitiva para un material perfectamente plástico, sin rigidización las ecuaciones de Prandtl-Reuss quedarán en la forma

$$d\epsilon_{ij}^p = -\frac{3}{2} \frac{d\epsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \sigma'_{ij} \quad (3.33)$$

Para un material con rigidización sin embargo $\sigma_{eq} > \sigma_e$ y es necesario encontrar la relación entre σ_{eq} y $d\epsilon_{eq}^p$ en otra forma, dependiendo del modelo de rigidización elegido, modelos y ecuaciones que se presentan en el capítulo siguiente.

Por supuesto estas mismas ecuaciones podían haberse obtenido partiendo de la ecuación (3.9) para una ley asociada al criterio de Von Mises, donde la superficie de plastificación es

$$f = J_2' - 1/3 \sigma_e^2 = 0$$

En este caso la ecuación de plastificación es

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

y multiplicando por sí misma

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p = (d\lambda)^2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$d\lambda = \frac{\sqrt{2J_2' \dot{\epsilon}^p}}{\sqrt{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}} \quad (3.34)$$

Derivando ahora f respecto a σ_{ij}

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial (J_2' - 1/3 \sigma_e^2)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial (1/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \\ &= 1/2 \sigma'_{ij} + 1/2 \sigma'_{ij} = \sigma'_{ij} \end{aligned} \quad (3.35)$$

con lo que

$$d\lambda = \sqrt{\frac{2J_2 \dot{\epsilon}^p}{\sigma_{mn} \sigma_{mn}}} = \sqrt{\frac{J_2 \dot{\epsilon}^p}{J_2}} \quad (3.36)$$

como la ecuación (3.33)

3.7.- VERIFICACION EXPERIMENTAL DE LAS ECUACIONES DE PRANDTL-REUSS.

La primera investigación experimental para determinar la validez de las relaciones tensión-deformación en el campo plástico fue realizada en 1926 por Lode [21]. Como se explicó en el capítulo anterior Lode ensayó tubos de acero y níquel bajo combinación de carga axial y presión interna. Además del parámetro de Lode para tensión μ definido en (2.34), Lode introdujo el parámetro de deformación plástica definido como

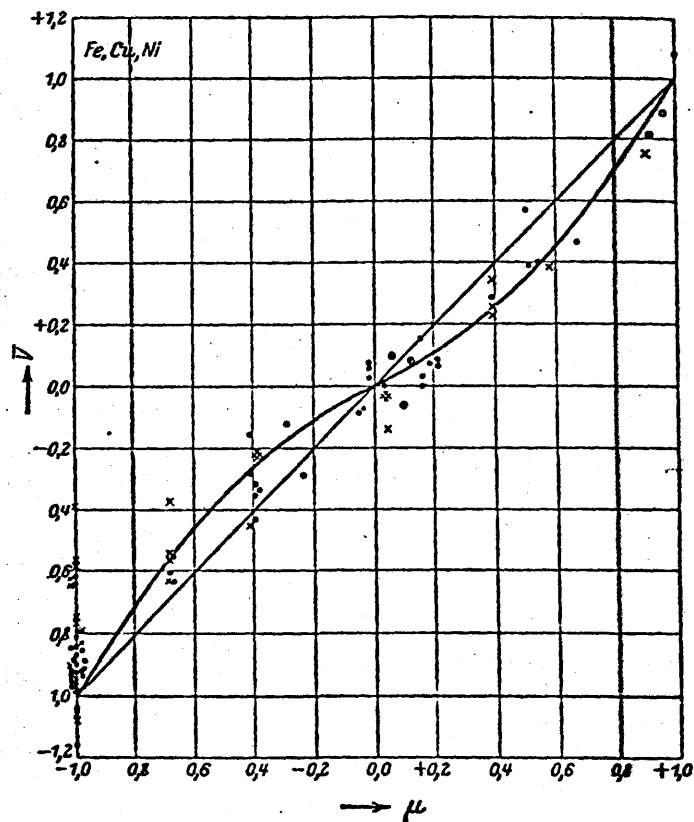
$$\nu = \frac{2d\epsilon_{II}^P - d\epsilon_{III}^P - d\epsilon_I^P}{d\epsilon_{III}^P - d\epsilon_I^P} = \frac{d\epsilon_{II}^P - 1/2 (d\epsilon_{III}^P + d\epsilon_I^P)}{1/2 (d\epsilon_{III}^P - d\epsilon_I^P)} \quad (3.37)$$

Teniendo en cuenta que para las ecuaciones de Prandtl-Reuss se debe cumplir la coincidencia de los ejes principales de tensión y deformación, así como la semejanza de círculos de Mohr, $\nu = \mu$ para todo el rango de experimentos.

Los resultados de Lode se muestran en la fig. 3.9

Aunque la relación parece cumplirse aproximadamente, existe una pequeña desviación confirmada posteriormente por Taylor y Quinney [40] mediante ensayos con tubos a tracción y torsión (vease epígrafe 2.5) no atribuible a errores experimentales.

LODE (1926)



Aunque algunas desviaciones pueden originarse en la anisotropía del material parece que las ecuaciones de Prandtl - Reuss no son totalmente correctas. Prager [32] ha mostrado que los resultados pueden mejorarse si se incluye el tercer invariante J_3' en el criterio de plastificación (lo que complica en gran manera la resolución de problemas de uso general) en la forma

$$f(J_2', J_3') = J_2' (1 - 0,73 J_3'^2 / J_2'^3) \quad (3.38)$$

Desde el punto de vista ingenieril las ecuaciones de Prandtl-Reuss son suficientemente aproximadas (al menos tanto como el criterio de Von Mises!) y las pequeñas desviaciones respecto a los datos experimentales no justifican en metales la complejidad adicional que supone la introducción de criterios de plastificación más complicados.

3.8.- LEY DE PLASTIFICACION ASOCIADA AL CRITERIO DE TRESCA

Así como las ecuaciones de Prandtl-Reuss están relacionadas con el criterio de Von Mises, existen leyes asociadas a cada criterio de fluencia e incluso otras más complicadas y que no siguen la típica ley asociada. Entre éstas últimas cabe destacar las leyes de uso en suelos y hormigón que se estudian en los temas 7 y 8. En este epígrafe se presentan algunas de las primeras.

La ley basada en el criterio de Tresca solo se emplea para casos muy concretos donde el criterio de Tresca muestra buenos resultados.

Su dificultad de uso estriba en que la superficie de plastificación de Tresca presenta puntos angulosos, también denominados puntos singulares o condiciones singulares de plastificación en los que no existe un gradiente único de la superficie de plastificación, siendo necesario fijar el plano en que nos movemos, o lo que es igual la máxima y mínima de las tensiones principales.

Suponiendo conocidas éstas: σ_I y σ_{III} podemos definir una tensión de Tresca equivalente

$$\sigma_T = \sigma_I - \sigma_{III} \quad (3.39)$$

que para el ensayo de tracción coincide con la tensión utilizada. Las ecuaciones de Prandtl-Reuss pueden escribirse ahora en función de esta nueva tensión equivalente como

$$d\epsilon_{ij}^p = -\frac{3}{2} \frac{d\epsilon_{eq}^p}{\sigma_T} \sigma'_{ij} \quad (3.40)$$

con $d\epsilon_{eq}^p$ definido como antes. Sin embargo esta ecuación es inconsistente realmente pues hemos utilizado distintas definiciones para $d\epsilon_{eq}^p$ y σ_T . Por ello a veces se considera una buena modificación, la hipótesis de que no existe plastificación en la dirección II ya que ésta no interviene. Un sistema de relaciones consistente puede por tanto obtenerse a partir de

$$d\epsilon_I^p = -\frac{\sqrt{3}}{2} d\epsilon_{eq}^p$$

$$d\epsilon_{II}^p = 0 \quad (3.41)$$

$$d\epsilon_{III}^p = -d\epsilon_I^p = -\frac{\sqrt{3}}{2} d\epsilon_{eq}^p$$

con

$$d\epsilon_{eq}^p = \sqrt{-\frac{2}{3}} \left[(d\epsilon_I^p)^2 + (d\epsilon_{II}^p)^2 + (d\epsilon_{III}^p)^2 \right]$$

3.9.- ECUACIONES TENSION-DEFORMACION DE HENCKY

Las relaciones tensión-deformación (3.9) y (3.40) se denominan incrementales porque ligan los incrementos de deformación plástica y de tensiones. Para obtener las componentes de la deformación plástica total se deben integrar esas ecuaciones a lo largo de toda la historia de carga. Hencky [15] en 1924 propuso relaciones tensión-deformación totales, donde la tensión actual se relacionaba con la deformación total. El método sólo puede aplicarse a casos especiales ya que no puede representar totalmente el comportamiento del material.

Con la hipótesis de deformaciones pequeñas y despreciando los cuadrados de los movimientos, la base de partida de Hencky es

$$\epsilon'_{ij} = (\phi + \frac{1}{2G}) \sigma'_{ij} \quad (3.42)$$

$$\epsilon_{ii} = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_{ii}$$

donde ϕ es un escalar, esencialmente positivo durante la carga y cero durante la descarga. Ecuaciones de este tipo fueron ya propuestas por Nadai en problemas de torsión. La componente plástica de la deformación es evidentemente.

$$\epsilon_{ij}^p = \phi \sigma'_{ij} \quad (3.43)$$

En el caso de material perfectamente plástico ϕ es un factor de proporcionalidad análogo a $d\lambda$ en (3.9); por lo que las deformaciones plásticas totales son proporcionales al tensor divisor de tensiones, como ocurre en el caso de Prandtl-Reuss para los incrementos de tensión. En las ecuaciones de Hencky el estado final de deformaciones viene dado de forma única por el es-

tado final de tensiones, cosa que no ocurre en las ecuaciones de Prandtl-Reuss, por lo que los dos sistemas llevan a conclusiones diferentes.

Las ecuaciones de Hencky y Reuss pueden contrastarse directamente mediante una representación geométrica. Si suponemos que los ejes principales de tensión tienen una de las direcciones fija, la ecuación (3.43) significa que el punto Q está situado en la prolongación del vector OP (fig. 3.10). Por tanto,

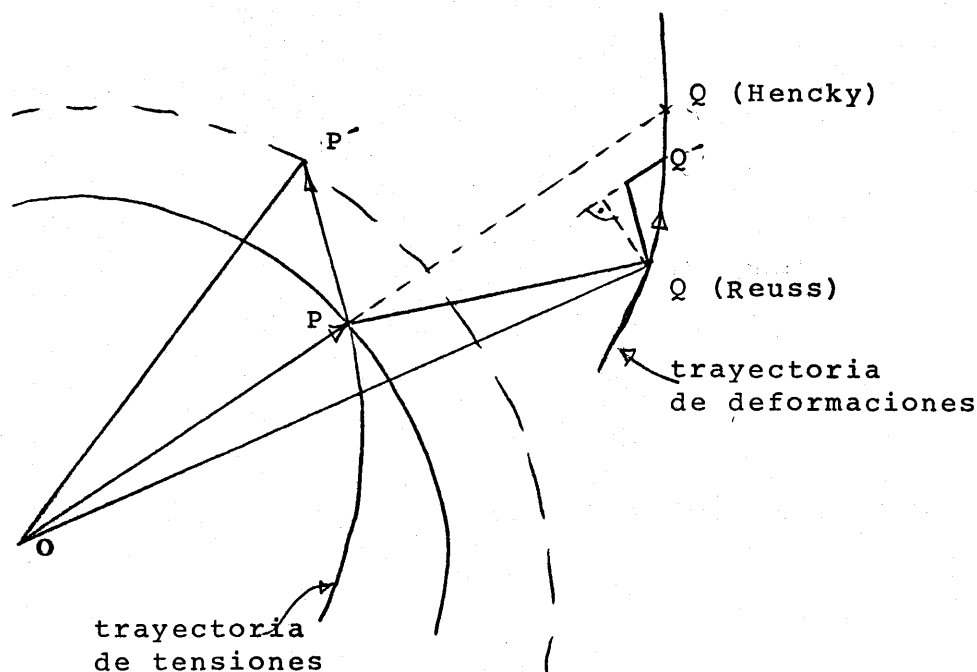


fig.- 3.10

según Hencky, cuando Q describe alguna trayectoria de deformaciones el vector tensión rota acompañándolo de forma que P siempre se encuentre alineado con OQ.

Sin embargo de acuerdo con las expresiones de Reuss, esto ocurre solamente cuando la trayectoria de tensiones es una línea recta que pasa por el origen, es decir cuando la dirección del vector tensión y vector deformación permanecen constantes. Analíticamente corresponde al caso de estado de carga proporcional o radial $\sigma_{ij} = c\sigma_{ij}^0$, donde σ_{ij}^0 es un estado de referencia -

arbitrario de tensiones y C es una función del tiempo monótona - mente creciente. Con ello las ecuaciones de Reuss quedan.

$$d\epsilon'_{ij} = C d\lambda \sigma'^0_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} \quad (3.44)$$

que puede integrarse directamente ya que σ'^0_{eq} y σ'^0_{ij} son constan - tes, obteniendose

$$\epsilon'_{ij} = (\emptyset + \frac{1}{2G}) \sigma'_{ij} \quad (3.45)$$

con $\emptyset = 1/C \int C d\lambda$. Estas son precisamente las ecuaciones de - Hencky. Sin embargo cuando la trayectoria de deformaciones es - cualquier otra, las predicciones de Hencky y Reuss son distintas.

Es muy fácil mostrar que las ecuaciones de Hencky no - son válidas para describir el comportamiento de un metal. Supue - to que después de una cierta deformación plástica el material es - descargado, parcial o totalmente y luego cargado de nuevo a un - estado diferente de tensiones pero situado en la misma superfi - cie de plastificación.

Naturalmente durante la descarga el material solo su - fre cambios en la deformación elástica permaneciendo la plástica - inalterada, sin embargo las ecuaciones (3.43) de Hencky suponen - que se producen cambios en esta deformación plástica, Estas mis - mas objeciones aunque no tan claras han sido realizadas por - Handelman, Lin y Prager para cambios tangenciales de tensión, - que han mostrado la imposibilidad de satisfacer las necesarias - condiciones de continuidad entre las deformaciones elásticas y - plásticas en este caso.

A pesar de todo ello, Budiansky [4] ha mostrado que - existen trayectorias de carga distintas de la proporcional para - las cuales, los postulados básicos de la teoría de plasticidad - son satisfechos por -----

las teorías de deformación total. La teoría de Budiansky postula la existencia de esquinas o puntos singulares en las sucesivas superficies de plastificación, aunque la existencia de tales puntos no ha sido aún probada experimentalmente.

Desde un punto de vista práctico existen una gran cantidad de problemas ingenieriles donde la trayectoria de carga no se encuentra muy lejos de la proporcional, supuesto naturalmente separada cuidadosamente en el momento de la descarga las partes cargadas todavía de las descargadas.

Problemas tales como la plastificación en discos y cilindros sometidos a tensiones térmicas han dado buenos resultados utilizando la teoría de deformación total. (KACHANOV)

3.10.- RELACIONES DEFORMACION PLASTICA-DEFORMACION TOTAL DE

PRANDTL-REUSS

Las ecuaciones de Prandtl-Reuss relacionan los incrementos de deformación plástica con las tensiones. Se deriva ahora un sistema de ecuaciones similar pero que envuelve solo deformaciones.

Estas ecuaciones permiten el cálculo de los incrementos de deformación plástica a partir de las deformaciones totales sin necesidad de utilizar las tensiones. La ventaja de esta formulación se hará evidente en el capítulo 9 cuando se estudien distintas formas de resolución del problema plástico.

Supongamos una trayectoria de carga hacia un estado de tensiones y de deformaciones plásticas ϵ_{ij}^p dado. Si incrementamos la carga una pequeña cantidad, de forma que produzca un pequeño incremento adicional de deformación plástica $d\epsilon_{ij}^p$, las deformaciones totales serán

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^p \quad (3.46)$$

donde ϵ_{ij}^e es la componente elástica de la deformación total, ϵ_{ij}^p es la deformación plástica acumulada hasta el instante previo a la introducción de la carga adicional, y $d\epsilon_{ij}^p$ es el incremento de deformación plástica indicado anteriormente, que es el que se intenta calcular.

Definimos las deformaciones totales modificadas como

$$\epsilon_{ij}^m = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p \quad (3.47)$$

y entonces

$$\epsilon_{ij}^m = \epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (3.48)$$

Restando la deformación octaédrica de los términos de la diagonal de los dos lados de la ecuación anterior resulta

$$\epsilon_{ij}^m = \epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (3.49)$$

donde ϵ_{ij}^e es el tensor desviador de deformaciones elásticas y ϵ_{ij}^m es el tensor desviador de deformaciones totales modificadas. De la ley de Hooke y de las ecuaciones de Prandtl-Reuss tenemos

$$\epsilon_{ij}^e = -\frac{1}{2G} \sigma_{ij}^e = -\frac{1}{2Gd\lambda} d\epsilon_{ij}^p \quad (3.50)$$

De donde

$$\epsilon_{ij}^m = (1 + -\frac{1}{2Gd\lambda}) d\epsilon_{ij}^p \quad (3.51)$$

Multiplicandola por sí misma y luego por 2/3 tenemos

$$2/3 \epsilon_{ij}^m \epsilon_{ij}^m = 2/3 (1 + -\frac{1}{2Gd\lambda})^2 d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p \quad (3.52)$$

Definiendo ahora una deformación total modificada - equivalente como

$$\epsilon_{et} = \sqrt{2/3 \epsilon_{ij}^m \epsilon_{ij}^m} \quad (3.53)$$

y recordando la expresión de la deformación plástica equivalente llegamos a

$$1 + -\frac{1}{2Gd\lambda} = -\frac{\epsilon_{et}}{d\epsilon_{eq}^p} \quad (3.54)$$

Con lo que a partir de (3.51)

$$d\epsilon_{ij}^p = -\frac{d\epsilon_{eq}^p}{\epsilon_{et}} \epsilon_{ij}^m \quad (3.55)$$

Esta ecuación es equivalente a las ecuaciones de Prandtl-Reuss, pero sin embargo las tensiones no aparecen, pudiéndose calcular los incrementos de deformación plástica a través de las deformaciones totales. Naturalmente hemos de recordar que debido a que se han utilizado las ecuaciones de Prandtl-Reuss se ha hecho uso también implícitamente del criterio de Von-Mises. También es conveniente señalar que la deformación total modificada equivalente es una magnitud puramente matemática sin ningún significado físico, aún en el caso uniaxial. Sin embargo puede relacionarse con la curva tensión-deformación a tracción como sigue.

De la ecuación (3.32)

$$d\lambda = -\frac{3}{2} \frac{d\epsilon_{eq}^p}{\sigma_e}$$

y sustituyendo este valor de $d\lambda$ en (3.54) tenemos

$$\left(1 + \frac{\sigma_e}{3G} \frac{d\epsilon_{eq}^p}{d\epsilon_{eq}^p}\right) = \frac{\epsilon_{et}}{d\epsilon_{eq}^p} \quad (3.56)$$

de donde

$$\epsilon_{et} = d\epsilon_{eq}^p + \frac{1}{3G} \sigma_e = d\epsilon_{eq}^p + \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_e \quad (3.57)$$

Refiriendonos a la curva tensión-deformación, si $d\sigma_e$ es un incremento de tensión al que corresponde un incremento de deformación $d\epsilon_{eq}^p$ y σ_e es la tensión al final del incremento, entonces ϵ_{et} es la suma de la deformación plástica más la deformación elástica total multiplicada por $2/3(1+\nu)$.

Si ahora tratamos de eliminar σ_e de la formulación ya que es un valor que corresponde al final del incremento de carga procederemos en la forma siguiente: De (3.56) tenemos

$$d\epsilon_{eq}^p = \epsilon_{et} - \frac{2}{3} \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_e \quad (3.58)$$

Por otro lado si despreciamos términos de orden superior al primero

$$d\sigma_e = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \epsilon_{eq}^p} d\epsilon_{eq}^p$$

$$\sigma_e = \sigma_{e,i-1} + d\sigma_e = \sigma_{e,i-1} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial \epsilon_{eq}^p} d\epsilon_{eq}^p$$

Sustituyendo en (3.58) y resolviendo para $d\epsilon_{eq}^p$ tenemos

$$d\epsilon_{eq}^p = \frac{\epsilon_{et} - 2/3 \{ (1+\nu)/E \} \sigma_{e,i-1}}{1 + 2/3 \{ (1+\nu)/E \} \left(\frac{\partial \sigma_e}{\partial \epsilon_{eq}^p} \right)_{i-1}} \quad (3.59)$$

Esta ecuación junto con la (3.55) nos permite resolver el problema planteado.

3.11.- LEY DE PLASTIFICACION PARA MATERIALES ANISOTROPOS

Recordando el criterio de plastificación elegido para materiales anisótropos que estaba dispuesto en la ec. (2.36) en la forma

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_x)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 \quad (3.60)$$

Si ahora consideramos una ley asociada será fácil el cálculo del vector incremento de deformación plástica. Así, como

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

tenemos derivando la ecuación anterior respecto a cada una de las componentes que

$$\begin{aligned} d\epsilon_x^p &= d\lambda [G(\sigma_x - \sigma_z) + H(\sigma_x - \sigma_y)] \\ d\epsilon_y^p &= d\lambda [F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)] \\ d\epsilon_z^p &= d\lambda [G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)] \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$d\gamma_{yz}^p = d\lambda L\tau_{yz}$$

$$d\gamma_{zx}^p = d\lambda M\tau_{zx}$$

$$d\gamma_{xy}^p = d\lambda N\tau_{xy}$$

Cuando los incrementos de deformación elástica son despreciables frente a los incrementos de deformación plástica las ecuaciones anteriores representan los incrementos de deformación

totales y las ecuaciones (3.61) son análogas a las ecuaciones de Levy-Mises para el material isótropo.

Si sumamos las tres primeras ecuaciones se observa que $\epsilon_{ii} = 0$ cumpliéndose por tanto la incompresibilidad.

Durante la deformación plástica el estado de anisotropía cambia. Sin embargo se puede suponer que este cambio es despreciable comparado con el estado inicial de anisotropía. En este caso debe esperarse que la correlación entre resultados teóricos y experimentales sea buena para un material que es significativamente anisótropo antes de que comience la deformación plástica.

Suponiendo pues que el estado de anisotropía permanece constante, las tensiones de plastificación deben incrementarse proporcionalmente cuando el material plastifica, por lo que los parámetros anisótropos deben decrecer en la misma proporción, aunque los cocientes entre ellos permanecerán constantes. Estos cocientes se pueden determinar experimentalmente, pero no los valores de cada uno de los parámetros.

Para salvar esta dificultad Hill propuso un nuevo criterio de plastificación en la forma

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\{F (\sigma_y - \sigma_z)^2 + G (\sigma_z - \sigma_x)^2 + H (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2LT_{yx}^2 + 2MT_{zx}^2 + 2NT_{xy}^2\} / (F + G + H)} \quad (3.62)$$

que solo considera los cocientes entre parámetros. Si la anisotropía es despreciable y se carga a lo largo de los ejes de anisotropía puede demostrarse que la ecuación anterior se reduce a la (3.60).

4.- MODELOS BASICOS DE RIGIDIZACION

4.1.- INTRODUCCION

Se han estudiado ya dos de los tres puntos básicos de toda teoría de plasticidad:

- Definición de un criterio de plastificación.
 - Expresión de una ley de evolución plástica.
 - Establecimiento de un modelo de rigidización. Se -
- tratará de ver ahora los modelos más aceptados que existen para la rigidización por deformación.

Hasta este momento hemos discutido exclusivamente la superficie de plastificación inicial llegando a la cual, comienza la plastificación. Para un material perfectamente plástico, la superficie permanece invariable, lo que significa que en el ensayo de tracción la tensión de límite elástico permanece.

Sin embargo, al estudiar los postulados de Drucker se vió que, en general, esto no ocurre, sino que la tensión aumen-ta, definiéndose el material con rigidización estable como aquél para el que un incremento de tensiones añadido realiza un trabajo positivo durante su aplicación, y además el trabajo ne-to realizado en un ciclo es cero ó positivo.

Esto significa que la superficie de plastificación debe cambiar de forma; que si después de producida la plastifica-ción se descarga y vuelve a cargarse, la nueva tensión equivalente de límite elástico no es la inicial sino que corresponde a la última tensión equivalente alcanzada por el material durante la plastificación. Es decir el punto se ha elevado debido a la rigidización.

Este cambio en la superficie de plastificación depen-de en una forma complicada de la historia de deformaciones del material, desde la última recristalización. (Puede suponerse -

que los cristales permanecen aleatoriamente orientados, con lo que se puede mantener la hipótesis de isotropía).

En la búsqueda de una formulación matemática para la rigidización se introduce una gran simplificación: diferentes trayectorias de deformación para alcanzar un mismo estado de tensiones conducen a la superficie de plastificación. En un metal real la superficie de plastificación depende de la distribución de las tensiones internas microscópicas, y estas de la historia de deformaciones, sin embargo los resultados experimentales prueban que la hipótesis anterior es razonable.

Expresado, de otra forma, ella indica que existe solamente una infinitud simple de estados distintos y todos pueden obtenerse del ensayo de tracción. Es decir:

$$F(\sigma_{ij}) = K \quad (4.1)$$

donde K es una función que tiene diferentes valores después de la plastificación. Si el material se descarga y recarga la plastificación no se producirá hasta alcanzar el nuevo valor de K.

De las definiciones en capítulos anteriores se deducen las siguientes posibilidades.

$F < K$		ESTADO ELASTICO.
$F = K$	$dF = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$	CARGA.
$F = K$	$dF = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$	CARGA NEUTRA
$F = K$	$dF = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$	DESCARGA

(4.2)

Geométricamente estas condiciones pueden observarse en la fig. 4.1.

Para $F = K$ el estado de tensiones se encuentra en la superficie de plastificación. $dF > 0$ significa que el estado de tensiones tiende a salir de la superficie produciéndose la plastificación. $dF < 0$ significa que se entra en la superficie de plastificación, teniendo lugar la descarga, mientras que $dF = 0$ corresponde al caso en que nos movemos en la misma superficie de plastificación.

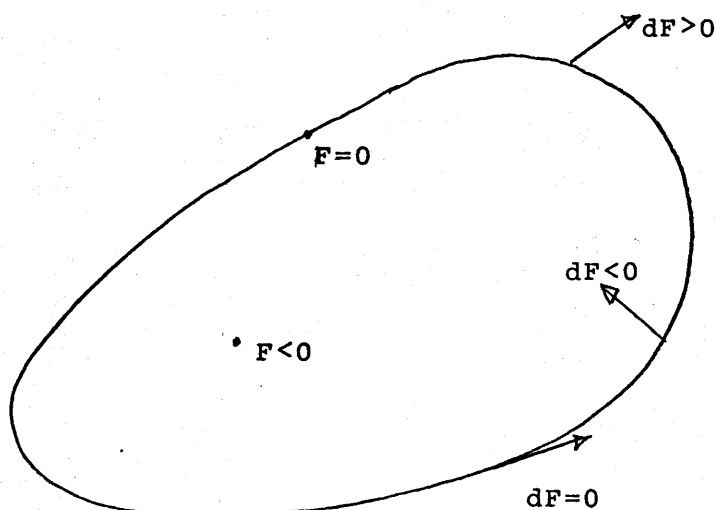


fig.-4.1

El problema pues consistirá en ver la relación entre K y ϵ_{ij}^P , o de una forma más general, encontrar la expresión

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P, \kappa) = 0 \quad (4.3)$$

que define las distintas superficies dependiendo de los valores de ϵ_{ij}^P , σ_{ij} y κ , siendo este último quien define la rigidización en función de ϵ_{ij}^P y otra serie de variables: los parámetros de rigidización.

Las leyes que definen este aspecto se denominan leyes de rigidización y son el objeto de este tema.

En el epígrafe 2 se estudian las distintas definiciones del parámetro κ . En el 3 se incluye una formulación general

partiendo de la expresión (4.3).

Varias leyes de rigidización se describen en los epígrafes 4 a 7. Por último en los apartados 8 y 10 se tratan brevemente algunos aspectos colaterales como , los efectos térmicos, el reblandecimiento por deformación, y el caso de carga cíclica.

4.2.- TRABAJO PLÁSTICO. DOS MEDIDAS DE LA RIGIDIZACION

Se ha visto en la introducción que el grado de rigidización del material se define a través de un parámetro κ .

La asociación obvia entre el trabajo necesario para producir la plastificación y la rigidización creada por ésta, supone la hipótesis de que el grado de rigidización es función del trabajo plástico total, o lo que es igual --, independiente de la trayectoria de deformaciones seguida. Esto no implica que la energía de deformación, asociada con las dislocaciones responsables de la rigidización, sea igual al trabajo plástico externo; en efecto solamente una pequeña fracción de éste se dirige a la formación de dislocaciones permanentes.

Para definir el trabajo plástico, sea $d\epsilon_{ij}$ un incremento diferencial de deformación.

$$d\epsilon_{ij} = 1/2 \{ (du_i)_{,j} + (du_j)_{,i} \} \quad (4.4)$$

donde du_i es el vector de incremento de desplazamiento. Una parte de esta deformación será recuperable, constituyendo lo que se denomina deformación elástica, definida en función de las tensiones,

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{d\sigma_{ij}}{2G} + (1 - 2\nu) \delta_{ij} \frac{dJ_1}{E} \quad (4.5)$$

El trabajo externo realizado por unidad de volumen en un elemento durante la deformación es

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} (d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p) = dW^e + dW^p \quad (4.6)$$

Pero $dW^e = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e$ es energía elástica reversible, mientras que la deformación plástica es irreversible, por lo que la energía plástica también lo es.

Este trabajo dW^p es el denominado trabajo plástico -

por unidad de volumen,

$$dW^P = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P \quad (4.7)$$

esencialmente positivo, debido a la irreversibilidad citada.

El trabajo total por unidad de volumen será

$$W^P = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P \quad (4.8)$$

donde la integral está extendida desde el estado inicial al final a través de la trayectoria de deformaciones seguida.

Recordando que la deformación plástica octaédrica se considera nula,

$$\begin{aligned} dW^P &= \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P = \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}^P + \sigma_{oct} (\epsilon_x^P + \epsilon_y^P + \epsilon_z^P) = \\ &= \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}^P \end{aligned} \quad (4.9)$$

o en tensiones principales

$$dW^P = \sigma'_I d\epsilon_I^P + \sigma'_{II} d\epsilon_{II}^P + \sigma'_{III} d\epsilon_{III}^P \quad (4.10)$$

En el plano Π donde $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$ es decir $\sigma_I = \sigma'_I$; $\sigma_{II} = \sigma'_{II}$ y $\sigma_{III} = \sigma'_{III}$, y teniendo en cuenta que

$\epsilon_I^P + \epsilon_{II}^P + \epsilon_{III}^P = 0$ se pueden usar los mismos ejes para la representación de tensiones principales, deformaciones plásticas principales, e incrementos de deformación plástica multiplicando las últimas por una constante que les confiera dimensiones de tensión, (vg: 2G).

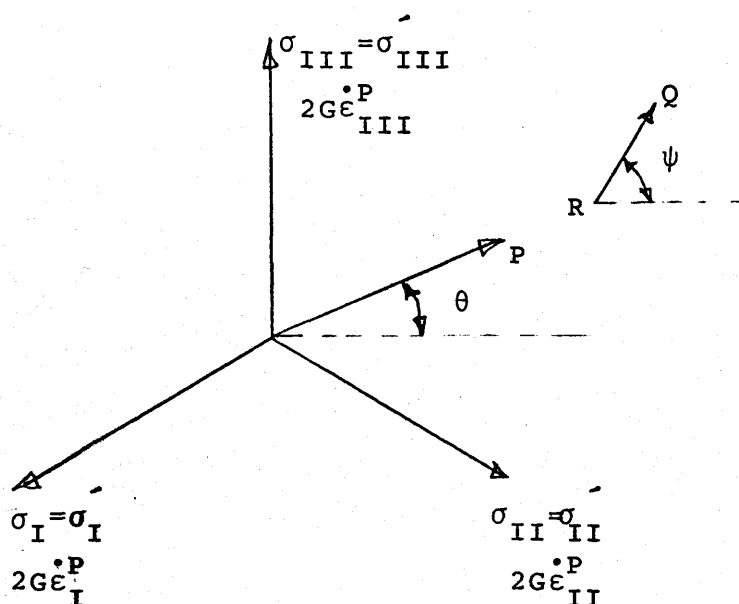


fig.- 4.2

Con esta representación el incremento de trabajo plástico es el producto escalar de los dos vectores

$$dW^P = \frac{1}{2G} (\vec{OP} \cdot \vec{RQ}) = \frac{|\vec{OP}|}{2G} |\vec{RQ}| \cos (\theta - \psi)$$

Pero

$$|\vec{OP}| = \sqrt{\sigma_I'^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{eq}$$

$$|\vec{RQ}| = 2G \sqrt{(d\epsilon_I^P)^2 + (d\epsilon_{II}^P)^2 + (d\epsilon_{III}^P)^2} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} G d\epsilon_{eq}^P$$

donde σ_{eq} y $d\epsilon_{eq}^P$ son las magnitudes equivalentes de tensión y de deformaciones definidas en el capítulo anterior.

En definitiva el incremento de trabajo plástico puede definirse como

$$dW^P = \sigma_{eq} d\epsilon_{eq}^P \cos (\theta - \psi) \quad (4.11)$$

Puede plantearse ahora la cuestión de cómo medir la rigidización que ha tenido lugar en un material sometido a plastificación progresiva. Para ello se han propuesto dos hipótesis.

La primera supone que la rigidización depende solamente del trabajo plástico total, y es independiente de la trayectoria.

toria de deformaciones. A esta medida se la suele denominar "equivalencia del trabajo plástico". La consecuencia que se deduce inmediatamente es que la resistencia a plastificaciones posteriores depende solamente de la cantidad de trabajo que se ha realizado sobre el material.

$$\kappa = W^P \quad (4.12)$$

recordando que W^P era el trabajo total por unidad de volumen de formado en (4.7).

La segunda hipótesis utiliza la deformación plástica equivalente (3.31).

$$\kappa = \epsilon_{eq}^P \quad (4.13)$$

donde ϵ_{eq}^P es la deformación equivalente total que podemos calcular a través de la integral a lo largo de la trayectoria de deformaciones del incremento de deformación plástica equivalente.

$$\epsilon_{eq}^P = \int d\epsilon_{eq}^P \quad (4.14)$$

El uso de los incrementos de deformación viene sugerido porque la rigidización no está determinada solamente por la diferencia entre los estados inicial y final del material. Si fuera así, un material sometido a tracción y posteriormente a una compresión, no se rigidizaría lo que está en desacuerdo con los resultados experimentales (aparte del efecto Bauschinger).

Por tanto una medida satisfactoria, debe incluir la suma de alguna cantidad continuamente positiva sobre la trayectoria de deformaciones.

La medida adoptada en (4.14) no es única, pero si simple y natural y Odquist [31] propuso una relación similar en términos de $d\epsilon_{eq}$ (análoga a $d\epsilon_{eq}^P$ pero para toda la deformación).

Para el criterio de Von-Mises y con rigidización isó-

tropa, las hipótesis (4.12) y (4.13) son equivalentes como veremos más adelante.

Puede verse una detallada discusión de las condiciones necesarias para la equivalencia en [16].

Las hipótesis anteriores suelen denominarse como hipótesis de "rigidización por trabajo" y "rigidización por deformación" respectivamente.

4.3.- FORMULACION GENERAL

Según se ha dicho la superficie de plastificación de un material rigidizable puede expresarse como

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P, \kappa) = 0$$

donde κ es función del trabajo plástico por unidad de volumen w^P ó de la deformación plástica equivalente ϵ_{eq}^P .

f define el dominio elástico ($f < 0$) y el plástico cuando $f = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} > 0$.

En el espacio de tensiones σ_{ij} , $f = 0$ es la ecuación de una superficie a la que las deformaciones plásticas y el parámetro de rigidización localizan y dan forma y tamaño. Esta superficie se irá modificando, adaptándose a las sucesivas situaciones del material, de forma que una vez alcanzado el estado $f = 0$ solo son posibles las situaciones de carga, descarga o carga neutra definidas en (4.2).

En el caso de carga (4.2) $f = 0$ $df = 0$ por lo cual -

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} d\epsilon_{ij}^P + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (4.15)$$

Esta ecuación se denomina condición de consistencia de Prager y es una relación fundamental.

Con la primera hipótesis $\kappa = w^P$, la relación de consistencia queda en la forma

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}^P} + \frac{\partial f}{\partial w^P} \sigma_{kl} \right\} d\epsilon_{kl}^P = 0 \quad (4.16)$$

ya que $-\frac{dW^P}{d\epsilon_{kl}^P} = \sigma_{kl}$. Suponiendo ahora una ley asociada se tiene -
de (3.25) $d\epsilon_{kl}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$, con lo que sustituyendo en (4.16) y -
despejando $d\lambda$ queda

$$d\lambda = \frac{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\left\{-\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}^P} + \frac{\partial f}{\partial W^P} \sigma_{kl}\right\} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (4.17)$$

y por tanto sustituyendo (4.17) en (3.25)

$$d\epsilon_{mn}^P = \frac{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\left\{-\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}^P} + \frac{\partial f}{\partial W^P} \sigma_{kl}\right\} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} d\sigma_{ij} \quad (4.18)$$

Tomando como hipótesis la correspondiente a rigidización por deformación, donde $\kappa = \epsilon_{eq}^P$ la ecuación de consistencia queda en la forma

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} d\epsilon_{ij}^P + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{eq}^P} \frac{\partial \epsilon_{eq}^P}{\partial \epsilon_{ij}^P} d\epsilon_{ij}^P = 0 \quad (4.19)$$

Sustituyendo de nuevo la regla de normalidad y despejando $d\lambda$ se obtiene

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}^P} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{eq}^P} \frac{\partial \epsilon_{eq}^P}{\partial \epsilon_{kl}^P}\right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (4.20)$$

Una forma muy interesante de la ley de deformación se obtiene llamando

$$\Gamma = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}^P} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{eq}^P} \frac{\partial \epsilon_{eq}^P}{\partial \epsilon_{eq}^P} \right)} \quad (4.21)$$

lo que conduce a

$$d\lambda = \Gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (4.22)$$

$$d\epsilon_{mn}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} = \Gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (4.23)$$

En las ecuaciones (4.18) y (4.23) se observa la relación lineal entre los incrementos de deformación plástica y los incrementos de tensión ya que el término

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \text{ solo depende de } \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^P \text{ pero no de } d\sigma_{ij}.$$

Estos resultados fueron obtenidos primeramente por Prager (1948) y Drucker (1959).

Para propósitos prácticos sin embargo, la ecuación (4.18) es demasiado incómoda, por lo que se suelen utilizar simplificaciones. La mas usual es considerar desacoplados en f los efectos debidos a las deformaciones y rigidización por un lado (definitorios de la forma y situación de la superficie en el estado de tensiones) y de las tensiones en sí. Así

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^P, \kappa) = \Phi(\sigma_{ij}) - \psi(\epsilon_{kl}^P, \kappa) \quad (4.24)$$

Las funciones Φ y ψ tendrán que definirse de igual manera que anteriormente f .

Sustituyendo (4.24) y (4.23), suponiendo para simplificar el caso de $\kappa = \epsilon_{eq}^P$ quedará

$$d\epsilon_{ij}^P = \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (4.25)$$

donde ahora Φ representa la superficie de plastificación inicial, mientras que Γ debería obtenerse de acuerdo con la ley de rigidización elegida, como se muestra en los apartados 4, 5 y 6.

KOITER propuso una generalización para superficies de carga que presentan esquinas. Tal superficie está compuesta por un número finito de superficies de carga suaves f_p que se encuentran para formar las esquinas. Koiter demostró (1953) que, si las superficies descritas por $f_p = 0$ actúan independientemente la deformación plástica total puede escribirse como suma de las contribuciones de algunas de las f_p como sigue

$$d\epsilon_{ij}^P = \dot{\epsilon}_{ij}^P = \sum_{p=1}^n c_p \Gamma_p \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (4.26)$$

donde

$$c_p = 0 \quad \text{si} \quad f_p < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$$

$$c_p = 1 \quad \text{si} \quad f_p = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \geq 0 \quad (4.27)$$

y Γ_p s son funciones positivas de la tensión, deformación e historia de deformaciones, equivalentes a la función Γ definida anteriormente para el caso de superficies suaves.

4.4.- EL CUERPO CON PLASTICIDAD LINEAL. EL CUERPO PLASTICO PERFECTO.

Sea una función de plastificación que corresponde a la extensión a tres dimensiones del caso simple mostrado en la figura

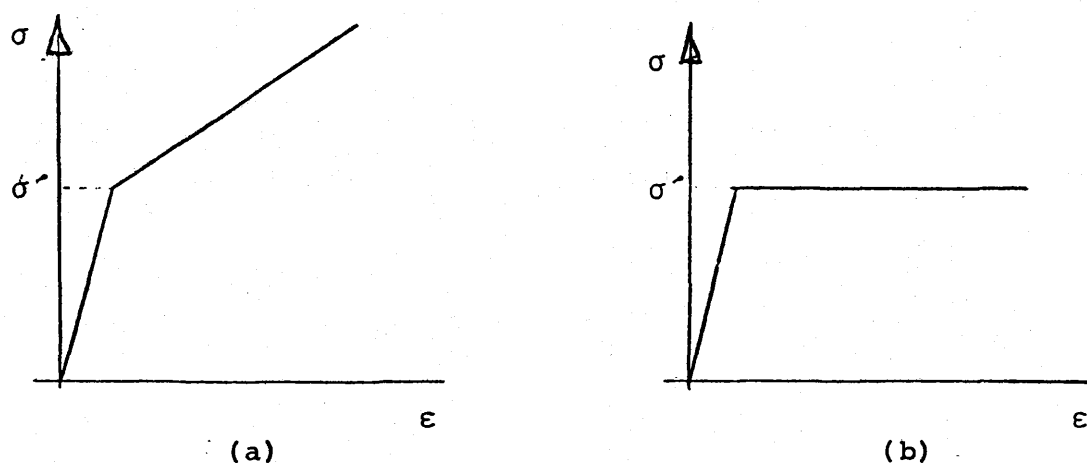


fig.- 4.3

En este "material de plastificación lineal" la superficie de plastificación depende linealmente de la deformación plástica.

$$f(\sigma_{ij}, c\epsilon_{ij}^P) = 0 \quad (4.28)$$

El cálculo de la ley de plastificación se realiza, a partir de la relación de consistencia que en este caso es

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial (c\epsilon_{ij}^P)} \cdot c d\epsilon_{ij}^P = 0 \quad (4.29)$$

y sustituyendo la regla de normalidad (3.31) en (4.29)

$$d\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{c \frac{\partial f}{\partial (c\epsilon_{kl}^P)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (4.30)$$

con lo que

$$d\epsilon_{mn}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} = - \frac{1}{C} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial (C\epsilon_{kl}^P)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} d\sigma_{ij} \quad (4.31)$$

En el caso particular de $C = 0$, obtenemos el estado de plasticidad ideal, como una generalización tridimensional de la curva indicada en (4.4b) para el caso de tracción. Por tanto la ley de plastificación vendrá dada por $f(\sigma_{ij}) = 0$.

Si recordamos la definición de Drucker, ello significa que la plastificación se produce cuando

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P = 0 \quad (4.32)$$

Efectivamente la expresión (4.31) indica deformación plástica infinita para C , a menos que $d\sigma_{ij} = 0$ (deformación plástica indeterminada).

La obtención de la ley de plastificación en este caso es inmediata

$$d\sigma_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P = (d\lambda)^2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

o lo que es igual

$$2 J_2 \dot{\epsilon}^P = (d\lambda)^2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{con lo que}$$

$$d\lambda = \sqrt{\frac{2 J_2 \dot{\epsilon}^P}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}} \quad (4.33)$$

$$d\epsilon_{mn}^P = \dot{\epsilon}_{mn}^P = \sqrt{\frac{2 J_2 \dot{\epsilon}^P}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \quad (4.34)$$

El signo de $d\lambda$ está restringido por la condición de -
que la plastificación produzca disipación de energía.

$$d\sigma_{ij} \epsilon_{ij}^P > 0$$

Koiter (1953) generalizó esta teoría mediante la in -
troducción de varias funciones $f_p(\sigma_{ij})$ de forma que un estado -
de tensiones supone un estado elástico si todas las funciones -
 f_p son negativas.

Para un estado de tensiones en límite de plastifica -
ción al menos una de las funciones se anula, mientras que ningun -
a de las demás toma un valor superior a cero.

Si por ejemplo las funciones $f_h = \dots = f_m = 0$ mien -
tras que el resto son negativas, la generalización de -
Koiter viene dada por

$$d\epsilon_{ij}^P = d\lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial \sigma_{ij}} + \dots + d\lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.35)$$

donde $d\lambda_h \dots d\lambda_m$ son factores arbitrarios no negativos de -
proporcionalidad.

4.5.- RIGIDIZACION ISOTROPA

Previamente se ha visto que la variación del límite elástico requiere la modificación del tamaño de la superficie de plastificación cuando se produce la deformación plástica.

Una de las hipótesis que se han propuesto supone que el material permanece isótropo después de la deformación plástica, o, lo que es igual, se rigidiza por igual en todas dimensiones con independencia del punto de actuación de σ . Esto significa que la superficie de plastificación aumenta de tamaño, siguiendo al incremento de tensión, pero no se modifica su forma ni su situación en el espacio de tensiones. Para el caso de Von Mises, la modificación consiste únicamente en aumentar el radio de $\sqrt{2/3} \sigma_i$ a $\sqrt{2/3} \sigma_{act}$, siendo σ_{act} la tensión de tracción que se ha alcanzado durante la plastificación y σ_i el punto de partida.

La hipótesis de rigidización isótropa es la más simple en lo que se refiere a su uso matemático, pero no puede representar el efecto Bauschinger. Tal como se vió en (2.1) el tamaño de la superficie de carga disminuye por un lado cuando por el otro se incrementa. Sería necesario disponer de un modelo en el que se tenga en cuenta este efecto. Para ello se ha propuesto el modelo cinemático que se estudia en el apartado siguiente.

Sin embargo la facilidad de uso del modelo isótropo y sobre todo el hecho de que en muchos procesos reales de plastificación la carga es monótona creciente (y por tanto no importan los posibles defectos que el modelo presente en la descarga) han hecho que esta regla se siga utilizando.

Para definir las relaciones matemáticas de este modelo se suelen seguir dos caminos diferentes:

a.- Una curva universal que relacione magnitudes duales.

$$\sigma_{eq} = H \left(d\epsilon_{eq}^P \right) \quad (4.36)$$

b.- Un parámetro de rigidización que varía en función del trabajo plástico.

El criterio más utilizado es el primero y es el que se va a explicar. Se dan también unas breves ideas para el segundo que es debido a Prager, y se comprueba que para el criterio de Von Mises, las soluciones de ambos casos son la misma.

La definición de la tensión equivalente debe reducirse en el caso de tracción a la tensión actuante, y es una cantidad que determinará si existe plastificación ó no.

Con estas propiedades y recordando que la definición de función de carga $f(\sigma_{ij})$, también determina si se alcanza el límite elástico, y se define una relación entre la tensión equivalente y la función de plastificación en la forma.

$$f(\sigma_{ij}) = C \sigma_{eq}^n \quad (4.37)$$

De forma que si se identifica σ_{eq} con la tensión de límite elástico, escogiendo un determinado criterio de plastificación podremos determinar C y n con la condición anterior. En el caso de Von Mises

$$J_2' = -\frac{1}{3} \sigma_e^2 \quad (4.38)$$

por lo que es evidente que $n = 2$ y $C = 1/3$, pudiendose expresar σ_{eq} como

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3 J_2'} = \sqrt{-\frac{3}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'} \quad (4.39)$$

con lo que queda justificada la elección de la σ_{eq} que se definió en el tema III (3.30).

La definición de la deformación plástica equivalente no es tan simple. Existen en general dos métodos. El primero define el incremento de deformación plástica equivalente de $\dot{\epsilon}_{eq}^p$ a través del trabajo plástico por unidad de volumen.

$$dW^P = \sigma_{eq} d\epsilon_{eq}^P \quad (4.40)$$

y como según (4.7) el trabajo plástico es

$$dW^P = \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}^P$$

Tendremos

$$d\epsilon_{eq}^P = \frac{1}{\sigma_{eq}} \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}^P \quad (4.41)$$

Multiplicando esta expresión por sí misma tenemos

$$\begin{aligned} (d\epsilon_{eq}^P)^2 &= \frac{1}{\sigma_{eq}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P = \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P \\ d\epsilon_{eq}^P &= \sqrt{2/3} \sqrt{d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2^{\dot{\epsilon}^P}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

que también coincide con la expresión de deformación equivalente usada en (3.31) y que para el caso de tracción pura se convierte en la deformación según el eje de carga.

Un segundo método para llegar a esta definición sigue un razonamiento intuitivo en el sentido de tratar de conseguir una definición del incremento de deformación plástica equivalente que sea el más simple posible y que para el caso de tracción se reduzca a la deformación plástica uniaxial. Evidentemente la combinación de incrementos de deformación plástica más simple - que es siempre positivo y que tiene la dimensión correcta es

$$d\epsilon_{eq}^P = C \sqrt{d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P} \quad (4.43)$$

de forma que para hacer esta definición compatible con el caso de tracción tendríamos (recuérdese $\dot{\epsilon}_{kk}^P = 0$).

$$d\epsilon_x^P = d\epsilon_{eq}^P = C \sqrt{(d\epsilon_x^P)^2 + 1/4 (d\epsilon_x^P)^2 + 1/4 (d\epsilon_x^P)^2} = C\sqrt{3/2} d\epsilon_x^P$$

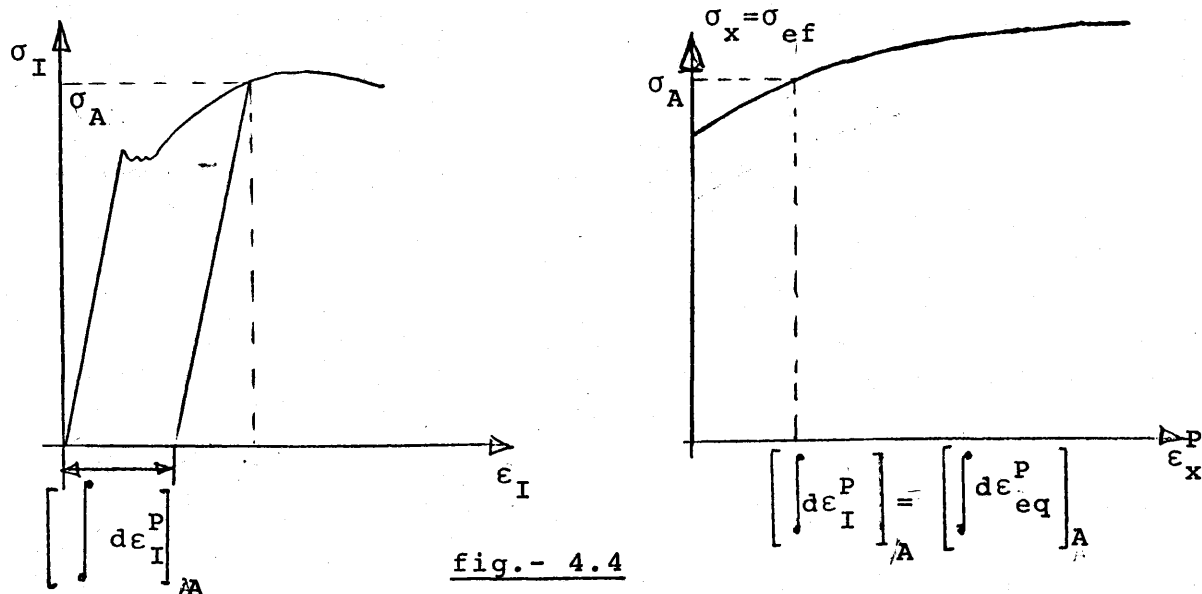
$$C = \sqrt{-\frac{2}{3}} \quad y \quad d\epsilon_{eq}^P = \sqrt{-\frac{2}{3}} \sqrt{d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P}$$

Resultando una expresión que está de acuerdo con el criterio de Von Mises (sic).

Una vez definidas las magnitudes equivalentes, el siguiente paso se refiere a la existencia de una curva universal.

$$\sigma_{eq} = H \left\{ \int d\epsilon_{eq}^P \right\} \quad (4.44)$$

curva que de acuerdo con las definiciones de σ_{eq} y $d\epsilon_{eq}^P$ es evidente que se puede deducir del ensayo de tracción sin más que eliminar en cada caso la deformación elástica según indica la fig. 4.4.



Esta integral $\int d\epsilon_x^P$ tiene el siguiente valor en el ensayo de tracción donde t es un parámetro de integración

$$\begin{aligned} \int_0^T d\epsilon_{eq}^P dt &= \int_0^T d\epsilon_I^P dt = \int_0^T (d\epsilon_I - d\epsilon_I^e) dt = \\ &= \int_0^T \left(-\frac{dl}{L} - \frac{d\sigma}{E} \right) dt \\ \int_0^T d\epsilon_{eq}^P dt &= \ln \frac{L}{L_0} - \frac{\sigma - \sigma_f}{E} \end{aligned} \quad (4.45)$$

que es fácil de obtener experimentalmente.

Antes de proseguir con el modelo matemático es necesario hacer una salvedad respecto a la existencia de esta curva universal. Esto, solo es rigurosamente cierto en los casos de carga proporcional, donde $\sigma_{ij} = C \sigma_{ij}^0$ en que σ_{ij}^0 es un estado de tensiones de referencia, ya que también se tendrá que $d\epsilon_{ij}^P = \alpha d\epsilon_{ij}^0$ e integrando ésta se llega a una relación entre σ_{eq} y $d\epsilon_{eq}^P$.

En definitiva se han definido a partir de un determinado criterio de plastificación una tensión equivalente y un incremento de deformación plástica equivalente, así como la relación entre ellos a través de una curva, universal. El siguiente paso consiste en hallar la ley de plastificación asociada a este criterio de rigidización. Para ello se usa la ecuación (4.24) donde $\Phi(\sigma_{ij})$ representa una función de las tensiones exclusivamente, y además consideramos que está dispuesta de forma que tiene dimensiones de tensión. $\Phi(\sigma_{ij})$ representa la combinación de tensiones que hacen que se alcance por primera vez ($\epsilon_{ij}^P = 0, \kappa = 0$) el nivel de plastificación, por lo que con una manipula-

ción adecuada ha de hacerse igual a la tensión de límite elástico. Para el criterio de Von Mises por ejemplo

$$J_2' = -\frac{1}{3} \sigma_e^2$$

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \sqrt{3J_2'} = \sigma_e \quad (4.46)$$

De acuerdo con ello y con la definición que se dió de σ_{eq} como relacionada con la función de carga, es evidente que $\Phi(\sigma_{ij})$ corresponde a la expresión de σ_{eq} para el criterio elegido.

Observando ahora la ley de plastificación definida en (4.25) como

$$d\epsilon_{ij}^P = \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}$$

multiplicando ambos miembros por σ_{ij} tendremos justamente la expresión del trabajo plástico, que por otro lado por la definición de $d\epsilon_{eq}^P$ es igual (4.40) a $\sigma_{eq} d\epsilon_{eq}^P$ con lo que

$$dW^P = \sigma_{eq} d\epsilon_{eq}^P = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P = \Gamma \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (4.47)$$

Pudiendose despejar Γ

$$\Gamma = \frac{\sigma_{eq} d\epsilon_{eq}^P}{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}} \quad (4.48)$$

que se puede aún arreglar observando que $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = d\Phi = d\sigma_{eq}$

$$\Gamma = \frac{\sigma_{eq} d\epsilon_{eq}^P}{d\sigma_{eq} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}} = \frac{\sigma_{eq}}{\left(\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \epsilon_{eq}^P}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}} =$$

$$= \frac{1}{H'} \frac{\sigma_{eq}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}} \quad (4.49)$$

donde H' es precisamente la pendiente a la curva $\sigma_{eq} = H\{(d\epsilon_{eq}^P)\}$ definida anteriormente

Con ello, la ley de flujo quedará

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ij}^P &= \frac{1}{H'} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{eq} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}} = \\ &= \frac{1}{H'} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{eq} d\sigma_{eq}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Particularizando para el criterio de Von Mises donde

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{\sigma'_{ij}}{\sqrt{J_2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{\sigma'_{ij}}{\frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_{eq}} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn} = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{\sigma'_{mn}}{\sqrt{J_2}} \sigma_{mn} = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{\sigma'_{mn} \sigma'_{mn}}{\sqrt{J_2}} = \sqrt{3J_2} = \sigma_{eq}$$

tendremos

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{1}{H'} \frac{\frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_{eq}} \sigma_{eq} d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} = \frac{3}{2} \frac{1}{H'} \frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \sigma'_{ij} \quad (4.52)$$

(Observese la correspondencia entre $2/3 H'$ y h en el capítulo - III).

La ecuación (4.50) define pues la ley de plastificación con rigidización isótropa general, mientras que la (4.52) lo particulariza al caso Von Mises.

La segunda forma que se indicó para llegar a esta expresión, debida a Prager consiste en considerar que la función de carga va variando de tamaño de acuerdo con un parámetro función del trabajo plástico.

$$f(\sigma_{ij}) = \kappa(W^P) \quad (4.53)$$

Si ahora diferenciamos esta ecuación tendríamos

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \frac{\partial \kappa}{\partial W^P} dW^P = \frac{\partial \kappa}{\partial W^P} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P \quad (4.54)$$

con lo que aplicando la regla de la normalidad y despejando $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial \kappa}{\partial W^P} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}} \quad (4.55)$$

$$d\epsilon_{kl}^P = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial \kappa}{\partial W^P} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}}$$

Veamos como queda esta expresión para el criterio de Von Mises con

$$f \equiv J_2' \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn} = \sigma'_{mn} \sigma_{mn} = \sigma'_{mn} \sigma'_{mn} = 2J_2'$$

$$d\epsilon_{kl}^p = \frac{\sigma'_{kl} \sigma'_{ij} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial \kappa}{\partial W^p} 2 J_2'}$$

Recordando ahora que $\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2'}$ y $d\sigma_{eq} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} d\sigma_{ij}}{\sigma_{eq}}$ tenemos -
que

$$d\epsilon_{kl}^p = \frac{\sigma'_{kl} 2/3 \sigma_{eq} d\sigma_{eq}}{\frac{\partial \kappa}{\partial W^p} \frac{2}{3} \sigma_{eq}^2} = \frac{1}{\frac{\partial \kappa}{\partial W^p}} \frac{\sigma'_{kl} d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \quad (4.56)$$

que es formalmente idéntica a (4.52) haciendo $\frac{\partial \kappa}{\partial W^p} = \frac{2}{3} H'$

Para terminar veamos la obtención experimental del parámetro H' .

Si tenemos la curva de tracción (fig. 4.6) sabemos que $H' = d\sigma_t/d\epsilon_t^p$ por lo que si h es la tangente a la curva en un punto se tendrá que

$$\frac{1}{h} = \frac{d\epsilon_t}{d\sigma_t} = \frac{(d\epsilon_t^e + d\epsilon_t^p)}{d\sigma_t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H'}$$

de donde

$$\frac{1}{H'} = \frac{1}{h} - \frac{1}{E} \quad (4.57)$$

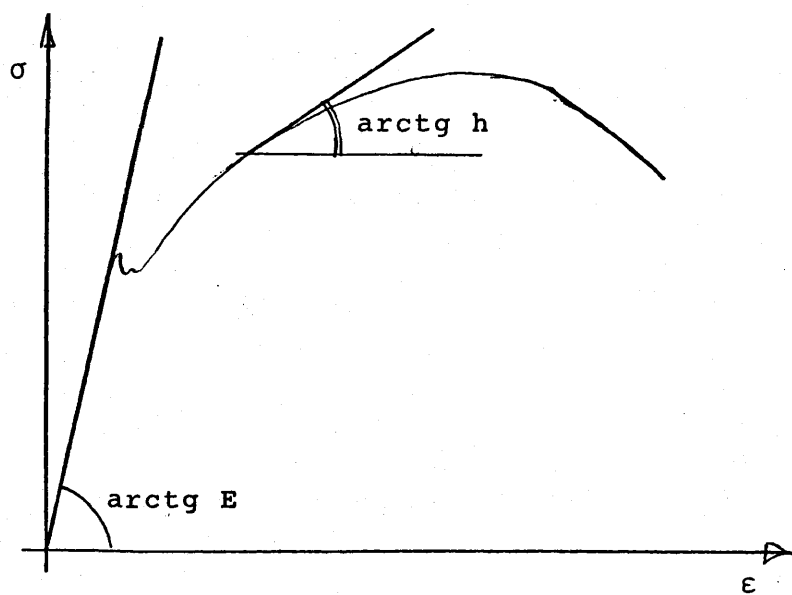


fig.- 4.5

En la referencia [38] se indican algunos métodos experimentales usuales para calcular este parámetro.

4.6.- RIGIDIZACION CINEMATICA

Se ha visto en el epígrafe anterior que el principal defecto de la hipótesis de isotropía es que no modela bien el efecto Bauschinger, fácilmente observable en la figura (4.7)

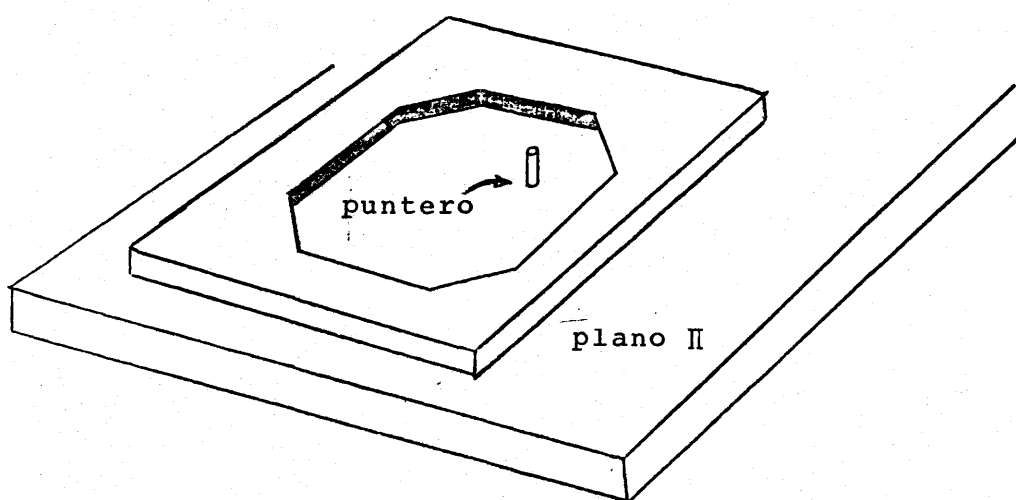


fig.-4.6

Para corregir esta deficiencia, Prager introdujo el modelo cinemático. En este modelo se mantiene constante el rango elástico total mediante la traslación de la superficie de fluencia sin que se deforme, y sin rotación. Para explicar esta ley Prager (1954) usó un modelo mecánico que viene representado en la fig. (4.6).

La superficie de plastificación inicial se imagina como marco plano rígido situado en el plano II. El punto de carga en el plano II se representa mediante un puntero sin rozamiento. Si el puntero llega a los límites del marco lo empujará haciendo que se mueva en el plano II.

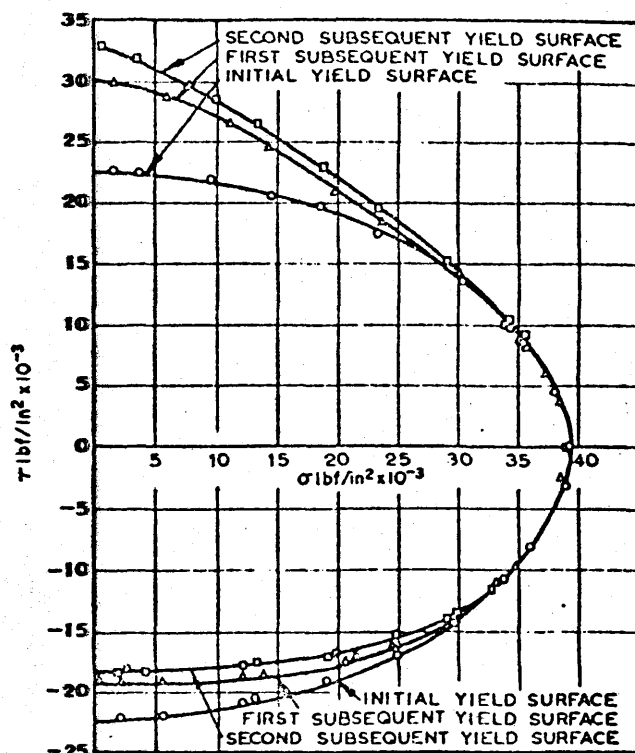


fig.- 4.7

Bajo la hipótesis de puntero sin fricción cualquier movimiento que el puntero imponga al marco tiene la dirección de la normal a la superficie en el punto de contacto (fig. 4.6). Sin embargo cuando el puntero llega a una esquina del marco (posible esquina de la superficie de plastificación), tiene posibilidad de movimiento dentro de un determinado ángulo.

El marco queda fijo cuando el puntero abandona sus límites y se mueve hacia su interior, representando esta situación una descarga y un estado de deformaciones elásticas.

Es obvio que no se viola ninguno de los postulados de Drucker y no puede ponerse ninguna objeción teórica a que el movimiento del marco signifique una regla de rigidización. De hecho, el efecto Bauschinger se representa muy simplemente y la anisotropía debida a la deformación plástica aparece de forma natural.

Con algunas variaciones en el modelo, Prager (1954) fue capaz de representar varios tipos de plasticidad: cuerpo rígido, perfectamente plástico, rigidizable, etc. Casi simultáneamente un concepto similar fue introducido por Ishlinski en la Unión Soviética.

Desarrollos posteriores fueron realizados por Prager, Boyce, Hodge, Novozhilov, Kadasevich y otros.

En general la superficie de Prager puede escribirse en la forma

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0 \quad (4.58)$$

donde α_{ij} representa las coordenadas del centro de la superficie de fluencia.

Como se ha dicho, la variación de estas coordenadas viene definida por una traslación que sigue la dirección de la normal a la superficie. Recordando ahora que el incremento de deformación plástica tenía también esa dirección Prager propuso la ley de definición de la traslación en la forma

$$d\alpha_{ij} = c d\epsilon_{ij}^P \quad (4.59)$$

donde c es una constante.

El cálculo de la ley de rigidización a partir de estas hipótesis iniciales se consigue mediante la relación de consistencia.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} c d\epsilon_{ij}^P = 0 \quad (4.60)$$

Observando la ecuación (4.58) se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} = - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.61)$$

con lo que sustituyendo en (4.60)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (d\sigma_{ij} - c d\epsilon_{ij}^P) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (d\sigma_{ij} - c d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}) = 0$$

y despejando

$$d\lambda = \frac{1}{c} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (4.62)$$

que sustituida en la ley de normalidad permite escribir

$$d\epsilon_{mn}^P = \frac{1}{c} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} d\sigma_{ij} \quad (4.63)$$

Una regla de rigidización cinemática diferente fue propuesta por Ziegler (1959) mediante la sugerencia de que

$$d\alpha_{ij} = d\mu (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (4.64)$$

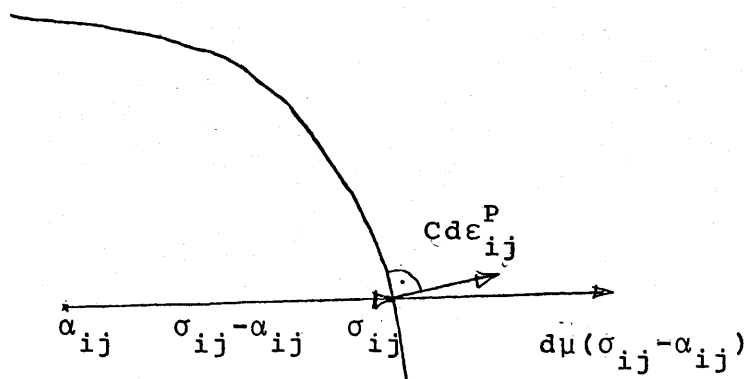


fig.- 4.8

donde $d\mu > 0$. Geométricamente, esto significa que la dirección del movimiento del centro de la superficie inicial sigue la dirección del radiovector que une el centro instantáneo α_{ij} con el punto de carga σ_{ij} (fig. 4.8).

De una forma similar al caso anterior podemos obtener el valor de $d\mu$ a través de la relación de consistencia.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (d\sigma_{ij} - d\alpha_{ij}) = 0$$

pudiéndose observar que el vector $(d\sigma_{ij} - d\alpha_{ij})$ tiene la dirección de la tangente a la superficie pues su producto escalar por $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ es nulo. Introduciendo ahora la expresión de Ziegler que da.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (d\sigma_{ij} - d\mu \sigma_{ij} + d\mu \alpha_{ij}) = 0 \quad \text{de donde}$$

$$d\mu = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij})} \quad (4.65)$$

En este caso no es posible el cálculo de $d\lambda$, siendo necesaria la utilización de una expresión adicional que relacione σ_{ij} con $d\epsilon_{ij}^p$ ó $d\mu$ con $d\lambda$, dependiendo esta relación del material.

4.7.- CARGA CICLICA. COMPARACION DE LOS RESULTADOS PREDICHOS POR LOS MODELOS DE RIGIDIZACION Y LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES.

Se denomina proceso de carga cíclica aquél proceso en el que se alcanza una tensión (o deformación) determinada en carga, se produce la descarga hasta llegar a una tensión diferente repitiéndose el proceso. En la fig. 4.9 se puede observar dicho proceso para el caso elástico puro y para el caso de que las tensiones extremas sean tales que se produzca la plastificación, y el modelo de rigidización corresponda al caso isótropo.

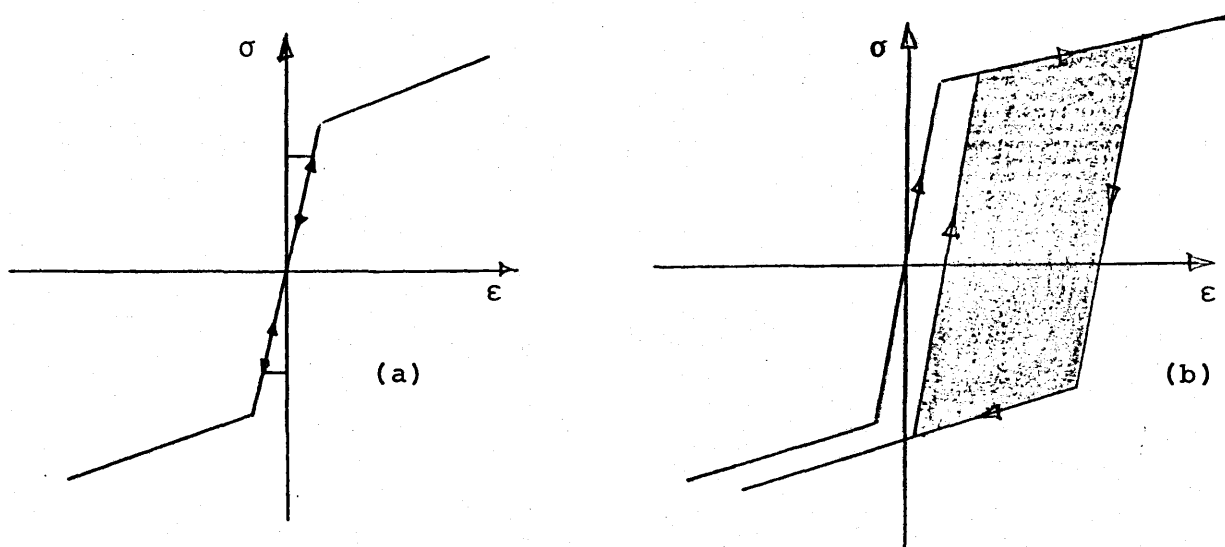


fig.- 4.9

La diferencia fundamental entre ambos estriba en que en el primero todo el trabajo aportado en la carga se recupera en la descarga, observándose que el área total encerrada por el proceso es nula. En el segundo, por el contrario, existe un lazo de histéresis claramente representado y un trabajo exterior perdido en forma de calor que viene representado por el área rayada.

Este lazo de histéresis es característico de los procesos cíclicos con plastificación y así lo demuestran los resultados experimentales, observandose que se produce siempre que exista la plastificación. Además, los resultados experimentales también indican (fig. 4.10) que el lazo va cambiando con los distintos ciclos, siendo cada vez más pequeño.

La forma es aproximadamente la que indica la figura, - observandose una inclinación progresiva (fig. 4.10) hacia el eje $\epsilon = 0$

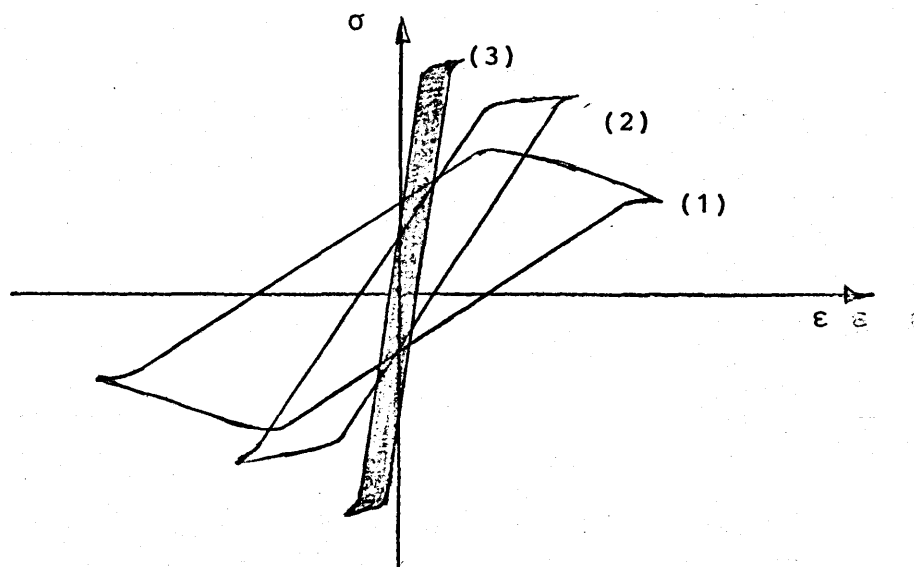


fig.- 4.10

En el caso de modelo isotrópico (fig. 4.11) si alguna de las tensiones es mayor que la tensión de límite elástico, el lazo de histéresis (fig. 4.11) no existe, lo que está en desacuerdo con la realidad experimental.

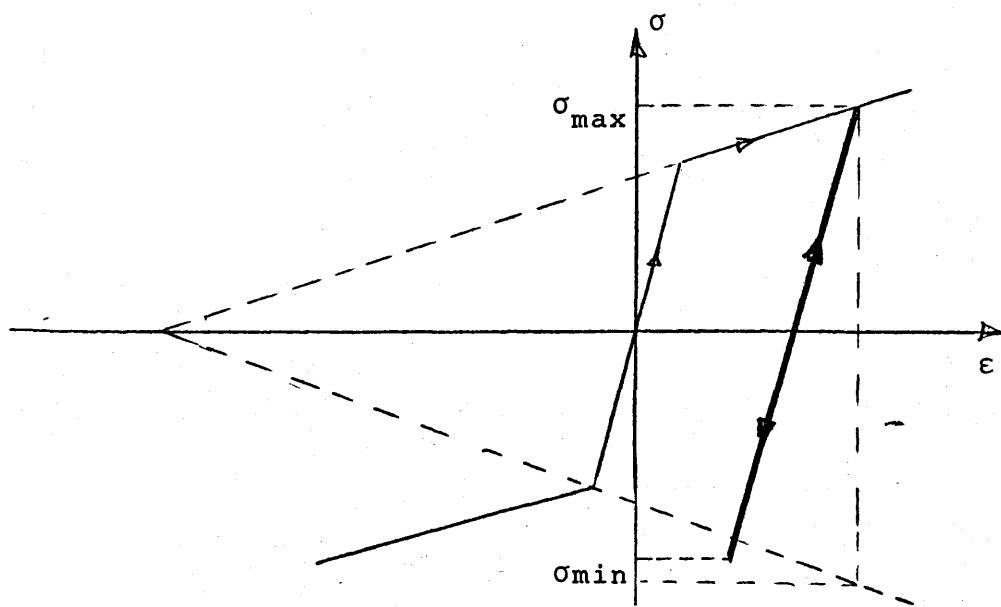


fig.- 4.11

En el modelo cinemático se conserva la longitud del tramo elástico (fig. 4.12) y el lazo de histéresis es constante.

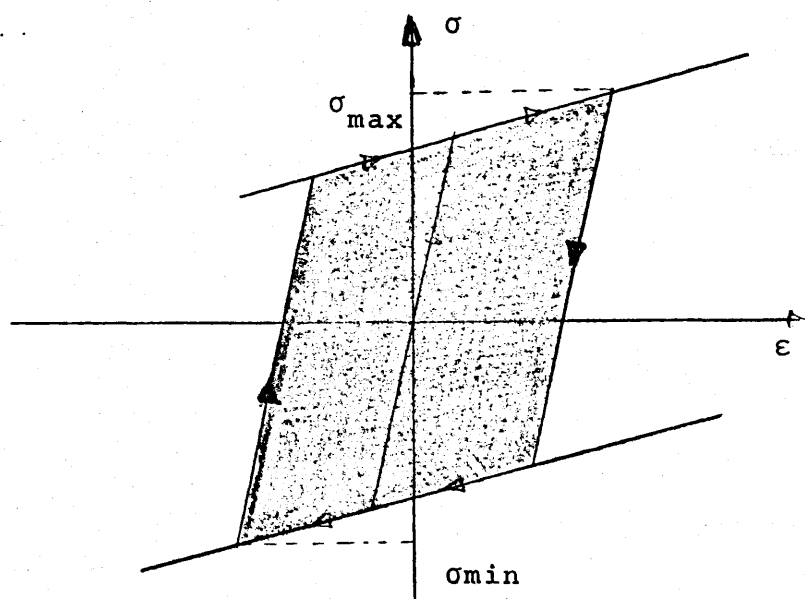


fig.- 4.12

4.8.- INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA

La temperatura puede ser en muchas ocasiones un factor importante en el comportamiento del material. Ya se indicaron - (Tema II) algunas de las formas en que esta magnitud podría influir en el comportamiento plástico del material. Ahora interesa la forma en que este factor afecta a las ecuaciones representativas del comportamiento plástico.

Para ello partiremos en el caso general de una función de comportamiento función de la temperatura

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa, T) = 0 \quad (4.66)$$

Esta función se considera continua y derivable, y tiene exactamente las mismas propiedades que las definidas en (4.2) para la función de carga sin influencia de la temperatura.

La condición de consistencia queda

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right) d\epsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial T} dT = 0 \quad (4.67)$$

y los casos de carga posibles siguen siendo los de carga, descarga y carga neutra definidos ahora por

$$\begin{array}{ll} f = 0 & \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} dT > 0 & \text{carga} \\ f = 0 & \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} dT = 0 & \text{carga neutra} \\ f = 0 & \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} dT < 0 & \text{descarga} \\ f < 0 & & \text{caso elástico} \end{array}$$

Para plantear la ley de plastificación se parte de una ecuación similar a la (3.4) lineal en incrementos, pero donde - ahora interviene la temperatura,

$$d\epsilon_{ij}^P = C_{ijkl} d\sigma_{kl} + B_{ij} dT \quad (4.69)$$

donde los tensores C_{ijkl} y B_{ij} dependen del estado del material $(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P, T)$ y en general no son isótropos.

Para el caso de carga neutra $d\epsilon_{ij}^P$ ha de ser nulo, lo - que se consigue si

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= A_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \\ B_{ij} &= A_{ij} \frac{\partial f}{\partial T} \end{aligned} \quad (4.70)$$

donde las componentes del tensor A_{ij} dependen del estado del material también. Bajo estas hipótesis y teniendo en cuenta las - condiciones de estabilidad ó postulados de Drucker se llega de - nuevo a la regla de la normalidad,

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

lo que implica que A_{ij} ha de ser de la forma

$$A_{ij} = \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.71)$$

donde D es una función escalar positiva de σ_{ij} , ϵ_{ij}^P y T . Con to- do ello la forma de la relación tensión-deformación que se deri- va es

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \quad (4.72)$$

Para efectuar el cálculo de la constante D es necesario utilizar la ecuación de consistencia

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right) \frac{1}{D} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial T} dT = 0 \end{aligned}$$

y despejando

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} dT \\ & - \frac{1}{D} = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$D = - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.74)$$

con lo que

$$\begin{aligned} d\epsilon_{mn}^p &= \frac{- \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \end{aligned} \quad (4.75)$$

pudiendose observar que el parámetro $d\lambda$ ha variado respecto a la expresión (4.20), simplemente en la adición del término

$-\frac{\partial f}{\partial T} dT$ en el numerador

Naturalmente $\partial \kappa / \partial \epsilon_{ij}^p$ depende de la medida de rigidización elegida, así como la función $\partial f / \partial \epsilon_{ij}^p$ dependerá del modelo de rigidización que se emplea también.

4. 9.- REBLANDECIMIENTO POR DEFORMACION

Se ha visto en el apartado anterior la influencia que tiene la temperatura en el tratamiento de las ecuaciones. Asimismo en (2.1) se comentaron someramente algunos de los efectos - que el incremento de temperatura puede tener sobre el comportamiento plástico del material.

Al mismo tiempo en (III.2) se ha visto que todo elemento que entra en estado plástico recibe una cantidad de trabajo - exterior que es mayor que la energía potencial de deformación - acumulada, existiendo una pérdida de energía (ciclo de histéresis en el caso de carga cíclica) que se convierte en calor. Debido a ello se produce un incremento de temperatura del material.

A temperaturas suficientemente alejadas de la de recristalización y para flujos plásticos lentos, este efecto de la temperatura es prácticamente despreciable. Sin embargo, para metales particulares y para algunas condiciones de trabajo que impliquen un fuerte incremento de temperatura, puede ocurrir que el reblandecimiento producido por la eliminación de dislocaciones en temperaturas próximas a la de recristalización, sea superior a la rigidización por deformación plástica, es decir: disminuye de una forma global la energía asociada a las dislocaciones en el metal.

En este proceso es de esperar que la tensión necesaria para producir un aumento en la deformación plástica disminuya - con el incremento de deformación, fenómeno que se denomina de reblandecimiento por deformación y que es similar aunque por causas distintas al reblandecimiento producido inmediatamente después de alcanzado el punto superior de fluencia en aceros dulces.

Un ejemplo de lo indicado se muestra en la fig. 4.13.b observandose que para velocidades de deformación superior a 0,3 se produce el reblandecimiento.

Asimismo en la fig. 4.13.a. se observa la importancia de la temperatura observandose la disminución del endurecimiento progresivamente con la temperatura hasta que para aproximadamente la temperatura de recristalización se produce el reblandecimiento.

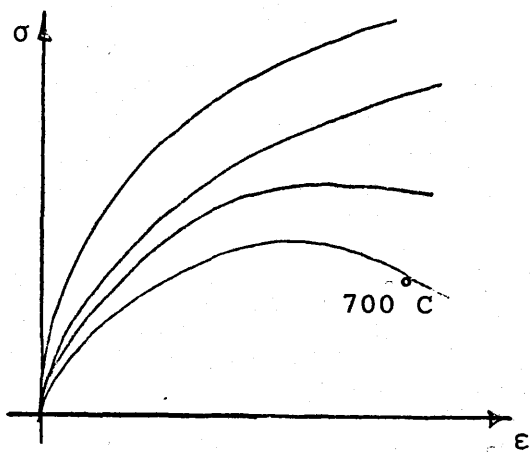


fig.- 4.13.a

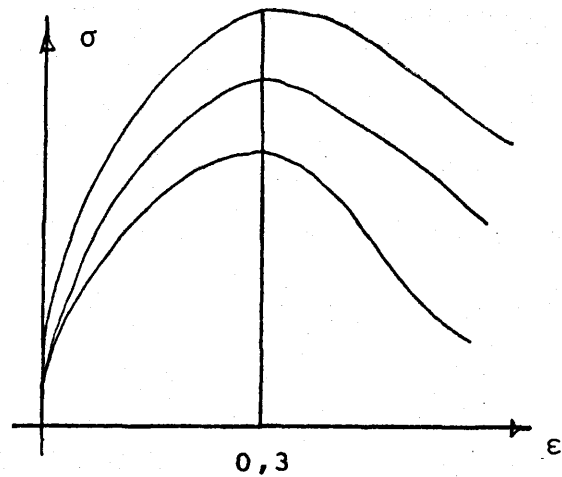


fig.- 4.13.b

Para un estudio más profundo de este tema puede consultar las referencias [3] [4].

5.- MODELOS COMPUESTOS DE RIGIDIZACION

5.1.- INTRODUCCION

En los temas anteriores, se vió que una vez elegida la ley de plastificación, que relaciona incrementos de deformación plástica con incrementos de tensión, el parámetro determinante, para leyes asociadas, era $d\lambda$, que a su vez podía ponerse en función de los parámetros de definición de la superficie de plastificación en cada momento.

El estudio de la variación de estos parámetros, y con ello de $d\lambda$, era el objeto de las reglas de rigidización de las que en el tema anterior se estudiaron las más comunes.

En el caso de reglas de tipo Von Mises - Prandtl-Reuss, y ley de rigidización isótropa era el parámetro H' , el que definía el tamaño de la superficie y la regla de plastificación, a través de la expresión (4.52), mientras que para leyes de rigidización cinemáticas era el modelo de variación de la posición de la superficie la que determinaba dicha regla.

Ambos métodos presentaban problemas, por ejemplo en la representación del caso cíclico, que ya se estudió, y generalmente adolecían de defectos contrapuestos, por lo que nada más natural que tratar de disponer un modelo que considere el acoplamiento entre ambos. Este acoplamiento fue propuesto por Hodge en 1957, dando lugar al primero de los denominados modelos compuestos que se estudian en este tema.

De la definición del parámetro H' en el caso isótropo en (4.54) y (4.57) se deduce que no depende de la posición del punto representativo del estado de tensiones del material sobre la superficie de plastificación, sino tan solo de la deformación

plástica acumulada a lo largo de la trayectoria de deformaciones seguida.

Puede pensarse pues que, no es que exista modificación de H' a la vez que se modifican las características de la superficie de plastificación inicial, sino que existen varias superficies que se van alcanzando a lo largo de la historia de deformación y que a cada una de ellas hay adscrito un parámetro de rigidización H' . Naturalmente este modelo daría lugar en el ensayo de tracción a una curva poligonal y no una curva derivable, como realmente ocurre, pero esta puede aproximarse tanto como se quiera simplemente disponiendo un mayor número de superficies de plastificación.

Físicamente se puede imaginar el material compuesto por varias capas de distintas propiedades que entran en plastificación para tensiones distintas; este modelo se estudia en el epígrafe 4.3.

A lo largo del tiempo se ha ido modificando y enriqueciendo este modelo acoplándose características de rigidización cinemática (Mroz) que desembocaron en el método de los parámetros internos como modelo de rigidización más general y completo que actualmente existe.

Para terminar el tema se harán las simplificaciones del modelo que nos permitirán entenderlo y aplicarlo a casos que no necesitan de toda su complejidad.

5.2.- MODELO CINEMATICO ISOTROPO

El acoplamiento de los modelos isótrofo y cinemático - fue propuesto por Hodge en 1957 denominandose modelo compuesto.

El criterio de plastificación es ahora

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - F(\epsilon_{eq}^p) = 0 \quad (5.1)$$

donde α_{ij} viene definido por alguna de las dos reglas anteriores de rigidización cinemática. Así, con la regla de endurecimiento de Prager $d\alpha_{ij} = c d\epsilon_{ij}^p$ y con la relación de consistencia tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (d\sigma_{ij} - d\alpha_{ij}) - \frac{dF}{d\epsilon_{eq}^p} d\epsilon_{eq}^p = 0 \quad (5.2)$$

o también

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (d\sigma_{ij} - c d\epsilon_{ij}^p) - \frac{dF}{d\epsilon_{eq}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} = 0 \quad (5.3)$$

de donde, teniendo en cuenta la regla de la normalidad

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = d\lambda \left(c \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{dF}{d\epsilon_{eq}^p} \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} \right)$$

Con lo que

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{c \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{dF}{d\epsilon_{eq}^p} \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}} \quad (5.4)$$

y por tanto

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}{c \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{dF}{d\epsilon_{eq}^p} \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}} d\sigma_{kl} \quad (5.5)$$

Para el caso de que $F(\epsilon_{eq}^p) = \sigma_o$ constante, lo que constituiría un caso cinemático puro, se tendría que $dF/d\epsilon_{eq}^p = 0$ y las expresiones anteriores (5.4) y (5.5) se reducirían a las expresiones de Prager (4.62) y (4.63) ya estudiadas.

En el caso de criterio de Von Mises

$$1/2 (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}) (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}) - F(\epsilon_{eq}^p) = 0$$

con lo que

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}) \text{ y la expresión (5.5) queda}$$

$$d\lambda = \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}) d\sigma_{ij}}{c(\sigma'_{kl} - \alpha_{kl})(\sigma'_{kl} - \alpha_{kl}) + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{dF}{d\epsilon_{eq}^p} \sqrt{(\sigma'_{mn} - \alpha_{mn})(\sigma'_{mn} - \alpha_{mn})}} \quad (5.6)$$

que se puede reducir observando la ecuación de Von Mises a

$$d\lambda = \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}) d\sigma_{ij}}{2c F(\epsilon_{eq}^p) + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{dF}{d\epsilon_{eq}^p} \sqrt{2 F(\epsilon_{eq}^p)}} \quad (5.7)$$

Entre el resto de las teorías de endurecimiento podemos citar la de Prager (1941) que supone una relación entre la deformación y las tensiones en la forma

$$\sigma = Y \operatorname{Th} \left(-\frac{E\varepsilon}{Y} \right) \quad (5.8)$$

donde σ es el estado de tensiones en el caso uniaxial y ε la deformación logarítmica. En este caso la curva es suave comenzando con una pendiente E y aproximándose asintóticamente al valor de la tensión Y . La aproximación es extremadamente rápida. Esta ecuación reemplaza el cambio abrupto de la curva tensión-deformación por una suave pero rápida curvatura en la cual la tensión Y prácticamente se alcanza con deformaciones de orden elástico.

La relación correspondiente entre σ_{eq} y $d\varepsilon_{eq}^p$ que correspondería a un estado de endurecimiento isótropo viene dado por

$$\frac{d\sigma_{eq}}{d\varepsilon_{eq}^p} = E \left(-\frac{Y^2}{\sigma_{eq}^2} - 1 \right) \quad (5.9)$$

Este sistema, aunque evita los problemas matemáticos debidos al cambio abrupto de la zona elástico a la zona plástica, ha recibido poca atención y la deseada simplificación práctica no se ha llevado a efecto.

5.3.- EL MODELO DE CAPAS SUPERPUESTAS

Muchas de las teorías que se han propuesto a lo largo de la historia de la Plasticidad fueron abandonadas por los insuperables problemas de cálculo que presentaban. Sin embargo, la aparición y desarrollo del ordenador, a partir de los años 60 - permitió reconsiderar las más atractivas.

Algunas, como la que aquí describimos, han recobrado su validez. Se utiliza la unión de varios materiales diferentes, que entran en plastificación a distintos niveles de tensión, para describir el comportamiento plástico de un material complejo. De esta forma, las características globales de plastificación van cambiando, cuando se van alcanzando los distintos umbrales de los elementos, simulando, en el caso de tracción, una curva poligonal con pendientes y esquinas en los puntos deseados, de acuerdo con las características plásticas (módulo y tensión de plastificación) de cada uno de los materiales simples que componen el complejo (fig. 5.1)

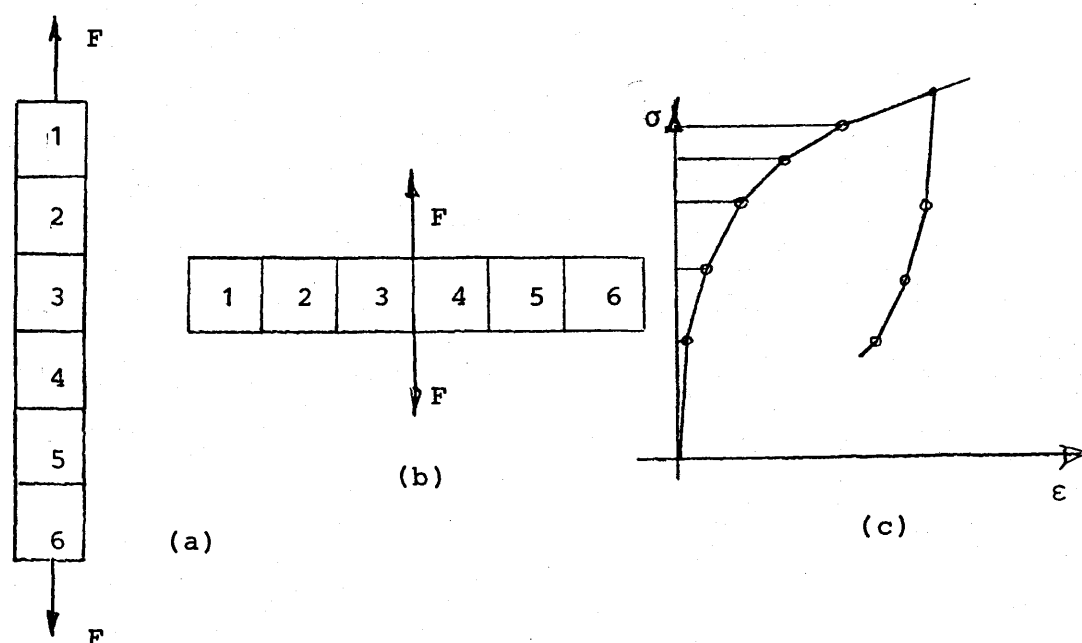


fig.- 5.1

Se supone que cada uno de dichos materiales simples se comporta de acuerdo con las reglas de la plasticidad clásica: - ley de plastificación asociada y rigidización isótropa o cinemática. En este último caso por ejemplo

$$i = 1, 2, \dots, N \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i (\sigma - \alpha_i) - k_i^2 = 0 \\ k_i = \text{Cte} \\ \dot{\alpha}_i = C_i \dot{\epsilon}_i^P \quad \dot{\epsilon}_i^P = -\frac{1}{H_i'} \lambda_i (\dot{\sigma}, \lambda_i); H_i' = C_i \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Si los elementos se encuentran en serie, tal como muestra la fig. 5.1.a se puede suponer que

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^P &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\epsilon}_i^P \\ \dot{\epsilon}^e &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\epsilon}_i^e \end{aligned} \quad (5.11)$$

Las superficies de plastificación de cada elemento se les permite desplazarse en la forma establecida por Prager - (fig. 5.2)

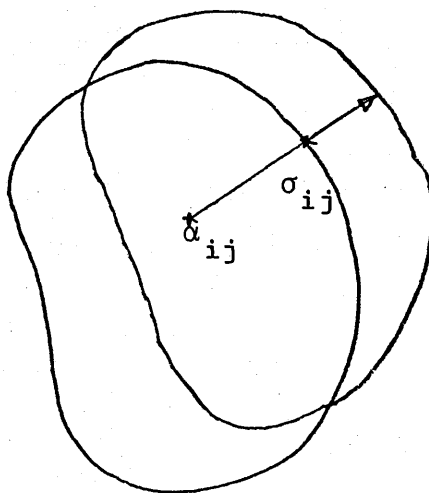


fig.- 5.2

Cada superficie, es activada cuando es alcanzada por el punto representativo del estado tensional y empuja a las siguientes, sin cruzarse, y su posición inicial puede establecerse planteando una correspondencia biunívoca con el ensayo de tracción - lo que permite la evaluación de los diferentes módulos para cada superficie y la situación de éstas. En la descarga las superficies regresan a su posición inicial reproduciendo la variación de H' tal como se muestra en la fig. 5.1.c.

Si la situación de carga del cuerpo corresponde a la de deformación constante, es posible imaginar los elementos simples_ unidos en paralelo y definir.

$$\sigma = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i (\epsilon - \epsilon_i^p) = A\epsilon - \frac{A}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i^p$$

(5.12)

Naturalmente, si el número de elementos se incrementa, - el modelo puede aproximar uno continuo. En este caso se introduce una función de distribución $\phi(k)$, de tal forma que la posición - de superficies que poseen la tensión de plastificación entre k y $k + dk$ es $\phi(k) dk$.

La deformación total para H' constante será entonces.

$$\epsilon = -\frac{\sigma}{E} + -\frac{1}{H'} \int_0^{\sigma} (\sigma - k) \phi(k) dk \quad (5.13)$$

Durante la descarga, el proceso corresponde al resultado de cambio de sentido de la curva mediante una traslación de - ejes como muestra la fig. 5.3.

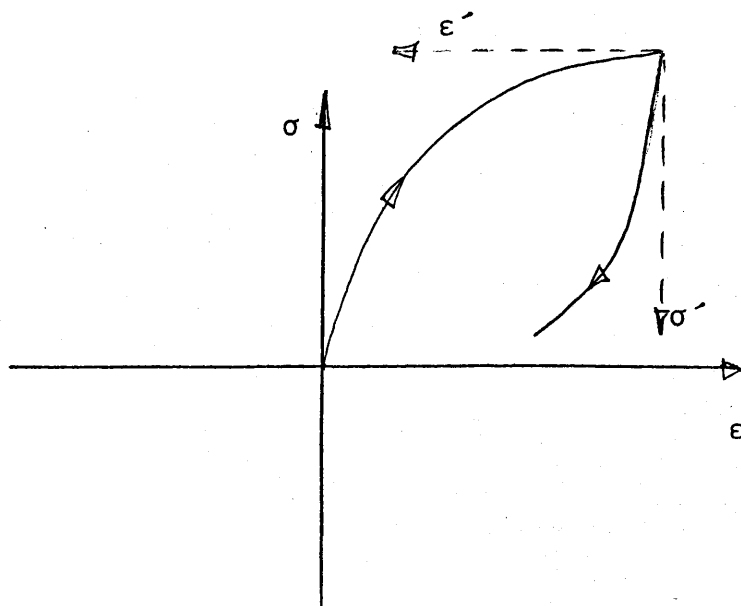


fig.- 5.3

Por tanto

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \sigma < \sigma_A \\ \dot{\sigma} < 0 \end{array} \right\} \frac{\sigma - \sigma_A}{2} = f \left(\frac{\epsilon - \epsilon_A}{2} \right)$$

(5.14)

y análogamente, si {

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_B < \sigma < \sigma_A \\ \dot{\sigma} \geq 0 \end{array} \right\} \frac{\sigma - \sigma_B}{2} = f \left(\frac{\epsilon - \epsilon_B}{2} \right)$$

Este modelo es conocido como de Masing y describe un comportamiento estático de carga cíclica.

5.4.- EL CAMPO DE MODULOS PLASTICOS

Los intentos de identificar las componentes del modelo anteriormente explicado, a través de las más modernas teorías - del comportamiento plástico de materiales, por ejemplo mediante la teoría de dislocaciones, produce una gran cantidad de variables que son necesarias para la definición del modelo, y que complican, en gran medida, la solución de problemas reales. Con objeto de mantener un número relativamente bajo de parámetros, que permitan la utilización de un tratamiento computacional, Mroz ha propuesto el concepto de "campo de módulos plásticos", que posteriormente ha sido desarrollado por Prevost, aplicándolo al análisis plástico de suelos. Con este modelo se consigue el representar leyes de endurecimiento muy complejas, mediante un número limitado de parámetros.

Para ello, se define no una superficie de plastificación, sino varias f_0, f_1, \dots, f_p , y a cada una de ellas se le asocia un módulo de endurecimiento constante H'_0, H'_1, \dots, H'_p .

Estas superficies pueden trasladarse en el espacio de tensiones en la forma típica del endurecimiento cinemático y al mismo tiempo pueden, en el caso más general, modificar su tamaño, con lo que el planteamiento para cada superficie corresponde a una ley de endurecimiento compuesta.

La única restricción que se impone es que las superficies no se intersecten a lo largo de todo el proceso, aunque sí pueden llegar a ser tangentes, por lo que en un inicio se suponen que están unas en el interior de otras.

La superficie más exterior f_p se considera como superficie de rotura, de forma que si el punto representativo del estado de tensiones la alcanza, el material rompe en ese punto. La

superficie más interna corresponde a la primera superficie de -
plastificación, y siempre que el estado de tensiones corresponda
a puntos internos a ella el material se encontrará en estado -
elástico, por lo que $H'_0 = \infty$, es decir no habrá deformación plás-
tica, como se deduce de (5.10). En algunos materiales, como por_
ejemplo suelos f_0 se considera como una superficie degenerada de
tamaño nulo, debido a que las deformaciones plásticas comenzaran,
prácticamente desde el instante de carga inicial.

Otra característica importante es que todos los H'_m son
positivos excepto H'_p , al que se le permite ser cero, e incluso -
negativo con objeto de representar comportamientos de reblandeci_
miento por deformación. Esto significa que todo estado de tensio_
nes interior a f_p representa una situación estable en el sentido
de Drucker, que se definió en el tema 3, es decir.

$$\dot{\epsilon}^p \quad \dot{\epsilon} > 0 \quad \dot{\epsilon} \text{ interior a } f_p \quad (5.15)$$

independientemente de las condiciones para f_p .

En cuanto a la forma de estas superficies de plastifi-
cación puede ser cualquiera, aunque en la mayoría de los casos, -
fundamentalmente para metales, por la simplicidad de su formu-
lación y por los buenos resultados obtenidos, suelen elegirse su_
perficies tipo Von Mises con distintos tamaños definidos por un_
parámetro variable para cada superficie. (fig. 5.4)

$$f_m = F (\bar{\sigma} - \sigma_m) - k_m = 0 \quad (5.16)$$

donde F es una función homogénea de orden uno, que para Von -
Mises sería la conocida.

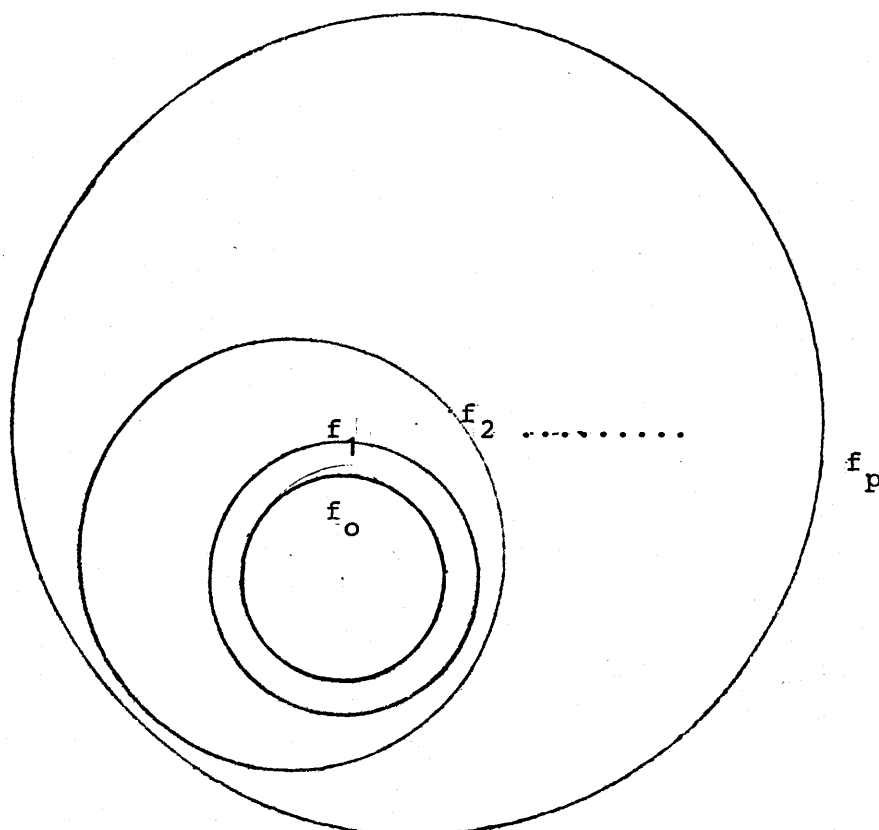


fig.- 5.4

$$F(\sigma' - \alpha_m) = \sqrt{-\frac{3}{2} (\sigma' - \alpha_m) (\sigma' - \alpha_m)} \quad (5.17)$$

siendo σ' el tensor desviador de tensiones, α_m el tensor representativo del punto ζ_m que define la posición de la superficie (centro de ésta en el subespacio de tensiones desviadoras) y k^m el parámetro que indica el tamaño de dicha superficie f_m .

Una forma analoga pero más fácil de manejar corresponde a

$$f_m = -\frac{3}{2} (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}) (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}) - k_m^2 = 0 \quad (5.18)$$

En definitiva los parámetros que en este caso definen el estado inicial del material serán α_m , k_m y H'_m . Así, por ejemplo, si en la situación inicial todas las coordenadas de α_m son iguales en el espacio de tensiones principales, el material es isótropo y en caso contrario será anisótropo; si los de las coordenadas de α_m en el espacio de tensiones son iguales para v^m tenemos una situación de anisotropía axisimétrica etc.

La determinación inicial de todos estos parámetros es muy importante y es necesario realizarla mediante experimentación del material en estudio, por ejemplo particularizando para un caso simple como puede ser el ensayo de tracción o en el caso de suelos los ensayos triaxiales. Este último caso se planteará en el tema 7 como un ejemplo de plasticidad en suelos, mientras que la fig. 5.4 muestra la primera posibilidad.

Una vez definidos dichos parámetros queda totalmente especificado el criterio inicial de plastificación.

A continuación es necesario definir la ley de plastificación que normalmente sigue la regla de la normalidad, es decir una ley asociada, de forma que

$$\dot{\epsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.19)$$

según (3.21)

$$d\lambda = \frac{1}{H'_m} \frac{\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (5.20)$$

y teniendo en cuenta que $\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma'_{ij}} = 3 (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m)})$ y

$d\sigma_{ij} = d\sigma'_{ij}$, se tendrá

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{1}{H'_m} \frac{3 (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m)}) d\sigma'_{ij}}{9 (\sigma'_{kl} - \alpha_{kl}^{(m)}) (\sigma'_{kl} - \alpha_{kl}^{(m)})} = \frac{1}{H'_m} \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m)}) d\sigma'_{ij}}{3 \cdot \frac{2}{3} k_m^2} = \\ &= \frac{1}{2H'_m k_m^2} (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m)}) d\sigma'_{ij} \end{aligned}$$

con lo que la deformación plástica será

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m)})}{H'_m k_m^2} (\sigma'_{kl} - \alpha_{kl}^{(m)}) d\sigma'_{kl} \quad (5.21)$$

que constituye la ley de plastificación buscada, idéntica naturalmente a la de Prandtl - Reuss del capítulo 3.

Para derivar la ley de rigidización veamos -- como se modifica la situación de las superficies de acuerdo con el estado de carga, según el modelo propuesto. Cuando el punto de tensiones alcanza una superficie, se permite la traslación de ésta en la forma típica de las leyes de rigidización cinemáticas de forma que llegará un momento en que el punto de tensiones alcance otra superficie. Si suponemos que las superficies no se intersectan, ambos deben ser tangentes en dicho punto, y al mismo tiempo se modifica instantaneamente el módulo plástico H'_m que pasa a tener el valor correspondiente a la última superficie alcanzada (fig. 5.5.a).

Si se produce un estado de descarga el punto de tensiones se separa de todas las superficies que habia alcanzado de forma que se encuentra en el interior de todas ellas, es decir el comportamiento es elástico, y así continua hasta que de nuevo alcanza a f_0, f_1, \dots, f_m de la misma forma, pero siguiendo la dirección contraria (fig. 5.5.b).

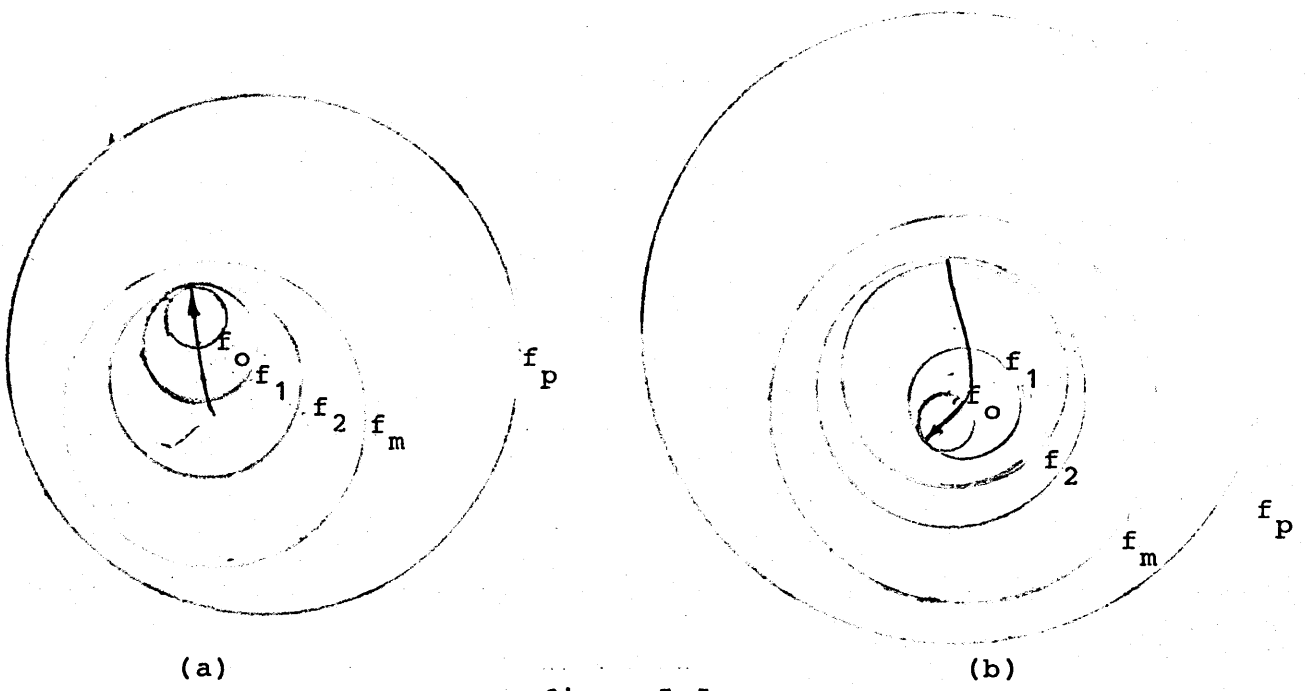


fig.- 5.5

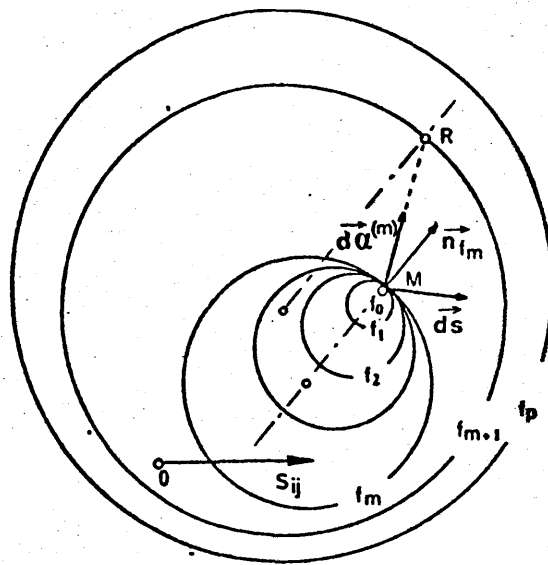


fig.- 5.6

Naturalmente, después de una historia de carga, las posiciones (y tamaños en general) de las superficies pueden ser completamente diferentes de las iniciales, y la anisotropía inducida refleja pues la historia de carga previa, de forma que la posición de los centros de las superficies de plastificación permiten deducir las propiedades direccionales de la historia de carga.

En definitiva para definir totalmente la ley de rigidización será necesario expresar la variación de α_m inicialmente, y luego, si existe, las de k_m y H'_m para cada superficie de acuerdo con la historia de deformaciones plásticas.

Veamos primero la variación de α_m , para lo cual es necesario definir la ley cinemática escogida. Para evitar la intersección entre distintas superficies se supone que la dirección del movimiento de todas las superficies, alcanzadas hasta ese momento, y por tanto tangentes en el punto de tensiones es la línea MRM (fig 5.6) donde S representa el punto tensional actual en la superficie m y R' es el punto de la superficie siguiente m+1, que posee la misma tangente que todos los anteriores, es decir que

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{kl}}} = \dots = \frac{\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{kl}}} = \frac{\frac{\partial f_{m+1}}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f_{m+1}}{\partial \sigma_{kl}}}$$

o lo que es igual

$$\frac{\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(0)}}{k_0} = \frac{\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(1)}}{k_1} = \dots = \frac{\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m)}}{k_m} = \frac{\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m+1)}}{k_{m+1}} \quad (5.22)$$

Por tanto $d\alpha'_{ij} = d\mu_{ij}$ donde $\mu_{ij} = \sigma_{ij}^{(m+1)} - \sigma_{ij}^{(m)}$, siendo $\sigma_{ij}^{(m)} \equiv M$ el punto actual representativo del estado de tensiones y $\sigma_{ij}^{(m+1)} = R'$ el punto de la superficie f_{m+1} , que cumple (5.22).

$$\sigma_{ij}^{(m+1)} = \frac{k_{m+1}}{k_m} (\sigma_{ij}^{(m)} - \alpha_{ij}^{(m)}) + \alpha_{ij}^{(m+1)}$$

y por tanto

$$\mu_{ij} = \frac{k_{m+1}}{k_m} (\sigma_{ij}^{(m)} - \alpha_{ij}^{(m)}) - (\sigma_{ij}^{(m)} - \alpha_{ij}^{(m+1)}) \quad (5.23)$$

Por último, el valor de $d\mu$ se consigue aplicando la relación de consistencia en la superficie m en la que se encuentra el estado de tensiones.

$$df_m \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f_m}{(\sigma_{ij}^{(m)} - \alpha_{ij}^{(m)})} (d\sigma_{ij}^{(m)} - d\alpha_{ij}^{(m)}) + \frac{\partial f_m}{\partial k_m} dk_m = 0$$

$$3 (\sigma_{ij}^{(m)} - \alpha_{ij}^{(m)}) (d\sigma_{ij}^{(m)} - d\alpha_{ij}^{(m)}) + 2k_m dk_m = 0$$

y sustituyendo $d\alpha_{ij}^{(m)}$ por $d\mu_{ij}$ y despejando $d\mu$

$$d\mu = \frac{3/2 (\sigma_{ij}^{(m)} - \alpha_{ij}^{(m)}) d\sigma_{ij}^{(m)} - k^{(m)} dk^{(m)}}{3/2 (\sigma_{kl}^{(m)} - \alpha_{kl}^{(m)}) - \mu_{kl}'} \quad (5.24)$$

En algunos casos varían también k_m y H'_m , dependiendo de esta variación de la historia de deformaciones plásticas. Así

$$k_m = k_m (\xi) \quad (5.25)$$

$$H'_m = H'_m (\xi)$$

donde ξ se identifica usualmente con la integral a lo largo del recorrido de deformaciones de la deformación plástica equivalente

$$\xi = \int \sqrt{-\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} \quad (5.26)$$

La variación de ξ será a partir de (5.26)

$$\begin{aligned} d\xi &= \sqrt{-\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} = \frac{3(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m)})}{2 H'_m k_m^2} d\sigma'_{kl} \\ &\cdot \sqrt{-\frac{3}{2} (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m)}) (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{(m)})} = -\frac{3}{2} \frac{(\sigma'_{kl} - \alpha_{kl}^{(m)}) d\sigma_{kl}}{H'_m k_m^2} \sqrt{-\frac{9}{4} - k_m^2} \\ d\xi &= -\frac{9}{4} \frac{(\sigma'_{kl} - \alpha_{kl}^{(m)}) d\sigma_{kl}}{H'_m k_m} \quad (5.27) \end{aligned}$$

La variación de $H'_m(\xi)$ usualmente se produce para valores muy grandes de ξ , mientras que las de $k^{(m)}(\xi)$ comienzan a variar desde la primera carga.

El caso más interesante se produce cuando existe reblandecimiento por deformación (fig. 5.7). Así, después de alcanzar el punto P se supone que todos los círculos se reducen en la misma cantidad sin cambiar su posición en el espacio de tensiones.

Esta cantidad suele tomarse como

$$dk^{(m)} = dk^{(p)} = \frac{3}{2} H'_p d\xi \quad V_m \quad (5.28)$$

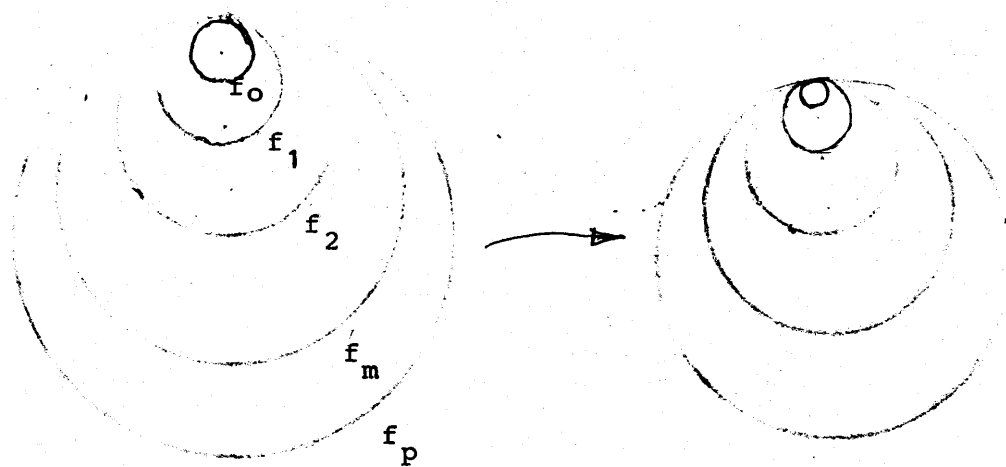


fig.- 5.7

5.5.- UN MODELO SIMPLIFICADO CON DOS SUPERFICIES

En vez de estudiar la evolución de todas las superficies f_m anidadas según el modelo anterior, podemos considerar solamente dos superficies f_o y f_p (fig. 5.8), de forma que el campo de módulos plásticos puede describirse usando una regla de interpolación a lo largo de la distancia δ entre el punto P en f_o y el punto asociado R en f_p con la misma tangente. Esta descripción modificada del campo de módulos plásticos fue propuesta para metales por Krieg y Dafalias e independientemente por Popov, y ampliada posteriormente por Mroz al estudio de suelos.

La superficie exterior es fija $f_p(\alpha_p, k_p) = 0$, mientras que la interna es móvil $f(\alpha - \alpha_o, k_o) = 0$.

El modelo de movimiento de esta última superficie puede ser cualquiera, como por ejemplo el indicado anteriormente en (5.23) y las reglas de expresión para la superficie f_o y f_p pueden ser las anteriormente aludidas.

La variación de H hemos indicado que se considera como interpolación entre el valor H_o que suele ser ∞ , es decir $1/H = 0$ (que es como realmente se interpola) y el valor H_p . Esta interpolación se realiza entre puntos asociados de ambas superficies, entendiendo como asociados aquellos que tienen la misma normal (fig. 5.9), y por ejemplo para un caso de suelos (Mroz) puede tomarse

$$H = H'_p + h \left(\frac{\delta/\delta_o}{1 - \delta/\delta_o} \right)^m \quad (5.29)$$

o bien

$$H = H'_p + h \ln \frac{(1 + \delta/\delta_o)}{(1 - \delta/\delta_o)} \quad (5.30)$$

donde h y m son constantes a determinar, H'_p es el valor del módulo plástico, correspondiente a la superficie exterior y δ y δ_o se muestran en la fig. 5.9.

Naturalmente $H = H'_p$ cuando $\delta = 0$ y $H = \infty$ cuando $\delta = \delta_o$, es decir cuando el punto representativo del estado de tensiones se encuentra a la misma distancia de la superficie externa.

Este modelo puede complicarse aún más modificando el valor de H'_p e incluso modificando las dimensiones de ambas superficies de acuerdo con la deformación plástica sufrida por el material. Estos casos se presentan sobre todo en el análisis plástico de suelos, que estudiaremos en el capítulo 7.

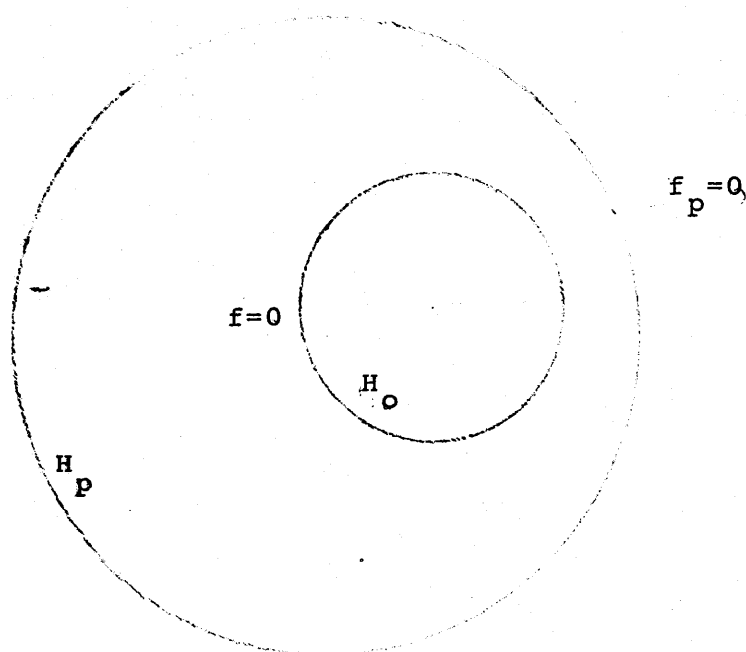


fig.- 5.8

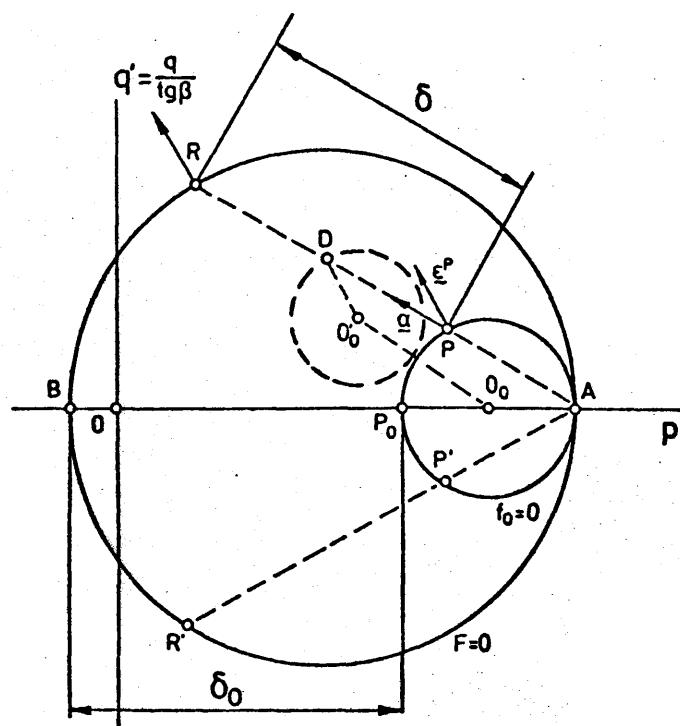


fig.- 5.9

6 .-ANÁLISIS LIMITE

6.1.-INTRODUCCION

En este capítulo se van a desarrollar conceptos de tipo energético que, además de su belleza formal, constituyen apoyo indispensable para la construcción de estimaciones en problemas prácticos.

La herramienta indispensable, como siempre que se trabaja a nivel global, es el teorema de los trabajos virtuales (que aquí se acostumbra a llamar "de las potencias virtuales") y la consiguiente definición de campos estáticamente admisibles o cinemáticamente admisibles, a los que ahora se añade la condición adicional de ser "plásticamente admisibles", esto es, estar en el interior o en la propia superficie de plastificación.

Si se admite la convexidad de aquélla, la regla de plastificación asociada y un material elastoplástico perfecto, es posible demostrar teoremas de acotación de la solución mediante los cuales, en forma generalmente muy rápida, se sustituye la solución incremental, tediosa e imposible de ser realizada a mano, por problemas de resolución inmediata que acotan los valores posibles de la solución. Desde el punto de vista ingenieril no cabe duda que el proceso es válido y, en cualquier caso, puede utilizarse como comprobación del resultado obtenido con métodos más sofisticados.

6.2.-EL TEOREMA DE LAS POTENCIAS VIRTUALES

Sea un sistema de tensiones σ en equilibrio estático con las cargas que las provocan T^v , X . Esto es, se cumple

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i &= 0 & \text{en} & \Omega \\ T_i^v &= \sigma_{ij} v_j & \text{en} & \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde v es la normal al contorno $\partial\Omega$

Consideremos ahora un campo de incrementos de desplazamiento (pueden ser llamados "velocidades", con cierto abuso de notación) \dot{u}^* y los correspondientes incrementos de deformación $\dot{\epsilon}^*$ - relacionadas con aquellos:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^* = 1/2 (\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*) \quad (6.2)$$

y veamos que se cumple el siguiente

Teorema

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* = \int_{\Omega} x_i \dot{u}_i^* + \int_{\partial\Omega} T_i^v \dot{u}_i^* \quad (6.3)$$

En efecto, si se multiplica la expresión (6.1) por \dot{u}^* y se integra en Ω , lo que suele denominarse planteamiento débil de (6.1) apoyándonos en \dot{u}^* , se tiene

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \dot{u}_i^* = \int_{\Omega} x_i \dot{u}_i^* \quad (6.4)$$

Más

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} \dot{u}_i^*)_{,j} &= \sigma_{ij,j} \dot{u}_i^* + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}^* = \\ &= \sigma_{ij,j} \dot{u}_i^* + \sigma_{ij} 1/2 (\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*) \end{aligned}$$

debido a las propiedades de simetría de σ_{ij} .

Es decir, (6.4) se escribe como

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \dot{u}_i^*)_{,j} = \int_{\Omega} x_i \dot{u}_i^* \quad (6.5)$$

y, por aplicación del teorema de la divergencia a la segunda integral

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} v_j \dot{u}_i^* = \int_{\Omega} x_i \dot{u}_i^*$$

de donde, por aplicación de la segunda de (6.1), se obtiene inmediatamente (6.3).

Un procedimiento inverso desde (6.3) conduce a las ecuaciones (6.1) y (6.2), teniendo en cuenta la independencia de los campos de tensión y desplazamiento.

En general (6.3) suele ser escrito poniendo de manifiesto las condiciones de contorno del problema en estudio.

$$\begin{aligned} \text{En } \partial\Omega_1 : \quad \underline{T}^v &= \underline{T}^o \\ \text{En } \partial\Omega_2 : \quad \underline{\dot{u}}^* &= \underline{\dot{u}}^o \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup N \quad (6.7)$$

siendo N un conjunto de medida nula introducido para tener en cuenta la posibilidad de cargas concentradas P. En estas condiciones (6.3) se puede descomponer así

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* = \int_{\Omega} x_i \dot{u}_i^* + \int_{\partial\Omega_1} T_i^o \dot{u}_i^* + \int_{\partial\Omega_2} T_i \dot{u}_i^o + \sum P_i \dot{u}_i^* \quad (6.8)$$

Observe de nuevo que los sistemas:

$$\text{en equilibrio} \quad (\underline{\sigma}, \underline{T}^v, \underline{x}) \quad (6.9)$$

y

$$\text{compatible} \quad (\underline{\dot{u}}^*, \underline{\dot{\epsilon}}^*) \quad (6.10)$$

son completamente independientes entre sí, lo que viene remarcado por la adición de la estrella (*) al último.

Si además, para un problema determinado, se elige (6.9) de modo que

$$\underline{T}^v = \underline{T}^o \quad \text{en} \quad \partial\Omega_1$$

diremos que $(\underline{\sigma}, \underline{T}^v, \underline{x})$ es un campo estáticamente admisible. (E.A)

De la misma forma, si (6.10) cumple

$$\underline{\dot{u}}^* = \underline{\dot{u}}^o \quad \text{en} \quad \partial\Omega_2$$

diremos que $(\underline{\dot{u}}^*, \underline{\dot{\epsilon}}^*)$ es cinemáticamente admisible (C.A)

En ocasiones se utilizan campos de tensión con líneas de discontinuidad como las que se observan en la fig. 6.1.

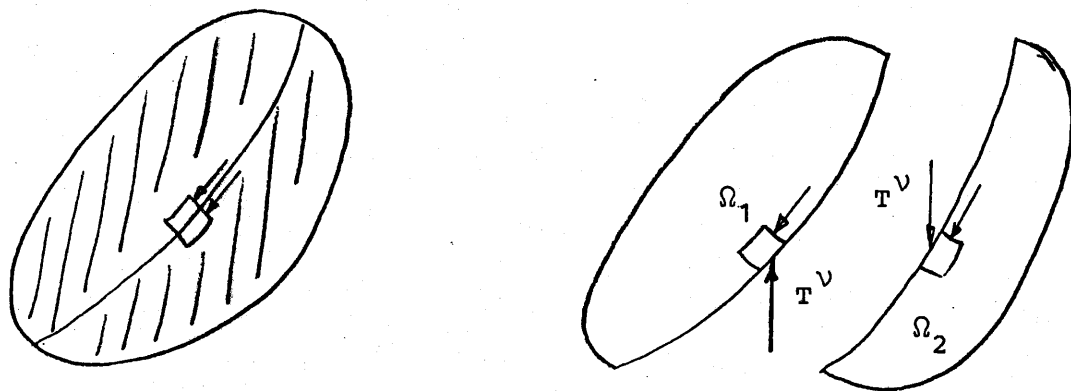


fig.- 6.1

Observese que al establecer el T.P.V como suma de los correspondientes a los dos semidominios Ω_1 y Ω_2 no se altera la ecuación - pues, por equilibrio, \underline{T}^ν es igual y contrario en ambos lados de la línea de discontinuidad.

Igualmente es posible imaginar campos discontinuos de - incrementos de deformación fig. (6.2) en los

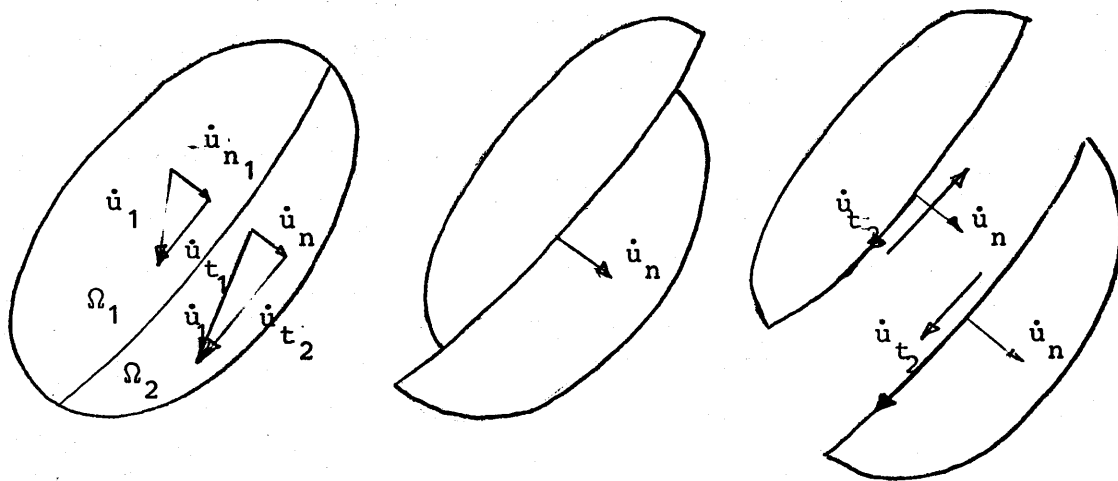


fig.- 6.2

que si se respeta la continuidad material debe prescribirse la - continuidad de $\underline{\dot{u}}_n$. En estas condiciones aparece en (6.8) el término adicional

$$\int_{\partial\Omega_3} \underline{T}^t \Delta \underline{u}$$

donde $\Delta \underline{u}$ es la "velocidad" relativa entre Ω_1 y Ω_2 .

6.3.-LA SUPERFICIE DE CARGA. SUPERFICIE DE COLAPSO.

Según se vió, si se admiten los postulados de DRUCKER, la superficie de plastificación es convexa y la regla de plastificación asociada, esto es

$f(\sigma)$ convexa

$$\underline{\dot{\epsilon}}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (6.11)$$

Puesto que las tensiones están provocadas por cargas - que, en general, varían de forma independiente a veces es útil - utilizar una nueva representación geométrica

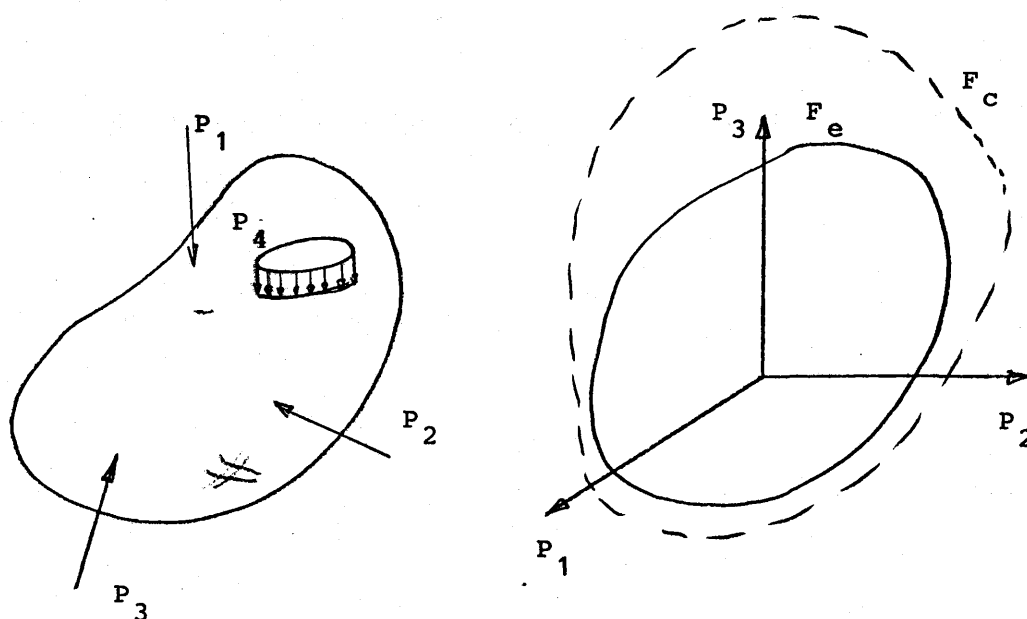


fig.- 6.3

donde los ejes correspondan a los distintos valores que pueden tomar las P_i (fig. 6.3). Cabe imaginar que diferentes combinaciones de P_i provoquen, la posibilidad de definir una superficie de carga F en la que son interesantes dos casos particulares;

F_e superficie elástica que separa las combinaciones que no producen plastificación en ningún punto, o dominio elástico - del resto.

F_C superficie de colapso que se alcanza cuando se produce un regimen de plastificación incontenible donde las deformaciones plásticas no estan limitadas por las elásticas.

Un ejemplo clásico (MANDEL, 1966) lo proporciona

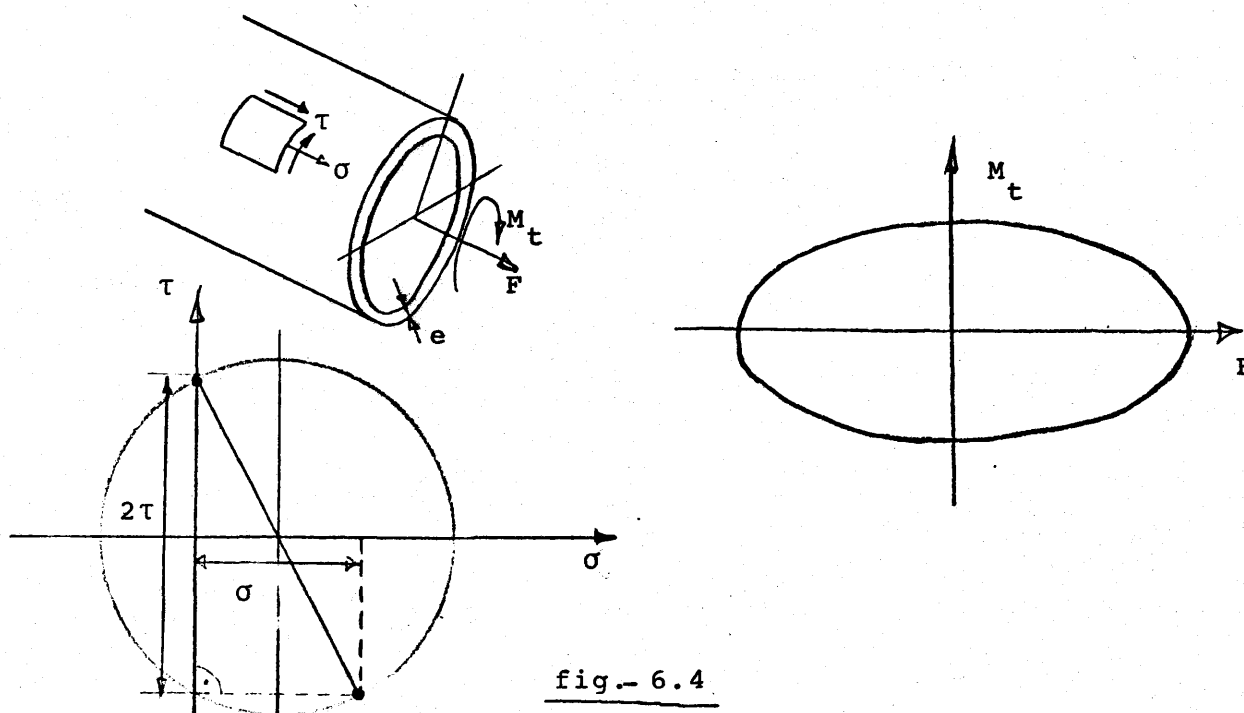


fig.- 6.4

el tubo de pared delgada sometido a esfuerzo axial F y torsor M_t .- Evidentemente -

$$\sigma = \frac{F}{2\pi R e}$$

(6.12)

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi R^2 e}$$

Si se aplica el criterio de Tresca

$$\tau_{\max} < k$$

la combinación límite es (fig. 6.4)

$$\sigma^2 + 4\tau^2 = 4k^2$$

es decir, usando (6.12)

$$F^2 + 4 \frac{M_t^2}{R^2} = 4 (2\pi Re)^2 k^2 = 4k^2 A^2$$

$$A = 2\pi Re$$

$$\left(\frac{F}{2kA}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{RkA}\right)^2 = 1$$

según se indica en fig. 6.4

En este caso $F^e = F^C$ lo que no siempre se produce. Ve - mos también que la superficie es convexa y ello es fácilmente ge - neralizable si se aceptan hipótesis (6.11).

Teorema. En virtud de las condiciones (6.11) la superficie de co - lapso es convexa.

Imaginemos dos estados E.A

$$(\underline{\sigma}, \underline{T}^v, \underline{x})$$

$$(\underline{\sigma}^C, \underline{T}^{vC}, \underline{x}^C)$$

donde al segundo corresponden unas deformaciones de colapso

$$(\underline{\dot{\epsilon}}^C, \underline{\dot{u}}^C) \quad (6.13)$$

Si se cumplen $f(\sigma_{ij}) < 0$ $f(\sigma_{ij}^C) < 0$ diremos que son _ estática y plasticamente admisibles (EPA).

Evidentemente

$$(\underline{\sigma}^C - \underline{\sigma}; \underline{T}^{vC} - \underline{T}^v; \underline{x}^C - \underline{x}) \quad (6.14)$$

es también EA. por lo que la aplicación del teorema de las poten - cias virtuales entre (6.14) y (6.13) conduce a

$$\int_{\Omega} (\underline{x}^C - \underline{x}) \underline{\dot{u}}^C + \int_{\partial\Omega_2} (\underline{T}^{vC} - \underline{T}^v) \underline{\dot{u}}^0 = \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^C - \underline{\sigma}) \underline{\dot{\epsilon}}^C > 0 \quad (6.15)$$

donde la desigualdad final se basa en la convexidad de la superfi - cie de plastificación.

(6.15) es el principio de la potencia máxima: "De entre todos los sistemas E.A. el real hace máxima la potencia disipada $D = \int_{\Omega} \underline{\alpha}^C \underline{\varepsilon}^C$

$$\int_{\Omega} \underline{x}^C \underline{\dot{u}}^C + \int_{\partial\Omega_2} \underline{T}^{\nu C} \underline{\dot{u}}^o \geq \int_{\Omega} \underline{x} \underline{\dot{u}}^C + \int_{\partial\Omega_2} \underline{T}^{\nu} \underline{\dot{u}}^o \quad (6.16)$$

La condición (6.16) define pues la pertenencia a la superficie de colapso. En forma discreta podría escribirse

$$\underline{p}_{-j}^C \underline{\dot{u}}_j^C \geq \underline{p}_{-j} \underline{\dot{u}}_j^C \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.17)$$

donde N es el número de cargas concentradas existentes.

Sea \underline{p}_1^C un punto de la superficie de colapso representativo de una cierta combinación límite y \underline{p}_2^C otro distinto.

Si

$$\underline{p} = \underline{p}_1^C + (1 - \mu) \underline{p}_2^C \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (6.18)$$

no produce colapso, la superficie es convexa.

Pero esto es evidente pues

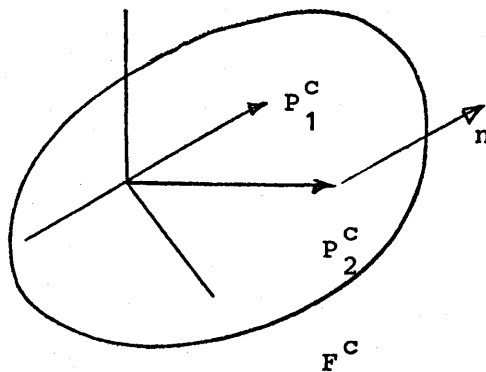


fig.- 6.5

$$\underline{p} \underline{\dot{u}}_C = \underline{p}_1^C \underline{\dot{u}}_C + (1 - \mu) \underline{p}_2^C \underline{\dot{u}}_C$$

$$(\underline{p}_1^C - \underline{p}) \underline{\dot{u}}_C = (1 - \mu) \{ \underline{p}_1^C \underline{\dot{u}}_C - \underline{p}_2^C \underline{\dot{u}}_C \} = (1 - \mu) (\underline{p}_1^C - \underline{p}_2^C) \underline{\dot{u}}_C$$

$$(\underline{p}_2^C - \underline{p}) \underline{\dot{u}}_C = \mu \{ -\underline{p}_1^C \underline{\dot{u}}_C + \underline{p}_2^C \underline{\dot{u}}_C \} = \mu (\underline{p}_2^C - \underline{p}_1^C) \underline{\dot{u}}_C$$

Pero en virtud de la no negatividad de μ y de (6.17) - los segundos miembros son positivos y por tanto

$$(\underline{P}_1^C - \underline{P}) \underline{\dot{u}}_C \geq 0$$

$$(\underline{P}_2^C - \underline{P}) \underline{\dot{u}}_C \geq 0$$

es decir \underline{P} no produce colapso. Obsérvese que el razonamiento es - el mismo utilizado a partir de los postulados de DRUCKER para la superficie de plastificación, y por ello, si al igual que allí, - se imaginan los incrementos de desplazamientos como normales

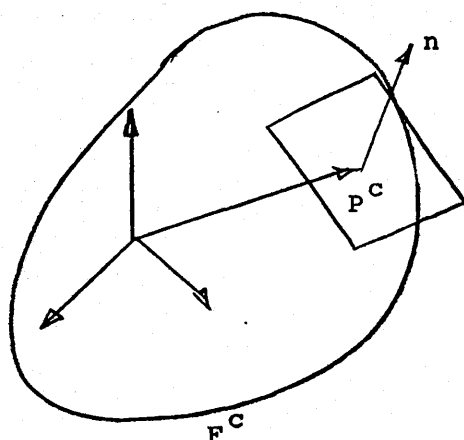


fig.-6.6

a la superficie de colapso todas las relaciones anteriores adquieren un significado preciso (fig. 6.6) y se pueden resumir las siguientes conclusiones:

A) Existe una superficie de colapso F^C independiente de las tensiones iniciales y del trayecto recorrido hasta el colapso.

B) Los campos de tensión $E P A$ están en el interior o en la superficie de F^C .

C) Para cargas proporcionales $Q = h q$ el valor de colapso es el mayor valor de las cargas para las que es posible un campo $E P A$.

Si se establecen las líneas de discontinuidad AA' y BB' los campos indicados son evidentemente E.A. para que sean además EPA es preciso que el diámetro de los círculos de Mohr correspondientes no supere los límites $\pm k$ del máximo valor de TRESCA. Así pues

$$\sigma_h \leq 2k$$

$$p_{\max} - \sigma_h = 2k$$

con lo que se debe cumplir

$$p_{\max} = 4k$$

y, según el teorema anterior, en el colapso

$$p^C > 4k$$

Puesto que la resistencia a la indentación obtenida es menor que la real, su elección desde el punto de vista del diseño sería "segura" y por ello el teorema estático es llamado, por abuso de lenguaje, "teorema seguro".

6.4.2.-Teorema cinemático.

Es evidente el interés en conseguir una acotación inversa a la anterior. Ello se consigue con el teorema cinemático que arranca de la definición de campos cinemática y plasticamente admisibles (CPA).

Diremos que $\underline{\dot{u}}^*$ es un campo CPA si

$$\underline{\dot{u}}^* = \underline{\dot{u}}^0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega_2$$

$$\underline{\dot{\epsilon}}^* = \underline{\dot{\epsilon}}^*_{ij} = 1/2 (\dot{u}^*_{i,j} + \dot{u}^*_{j,i}) \quad (\text{C.A.})$$

y además

$$\underline{\dot{\epsilon}}^* = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \quad , \quad f(\underline{\sigma}^*) = 0 \quad (6.19)$$

Debido a las condiciones de DRUCKER (convexidad y normalidad)

$$(\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \underline{\dot{\epsilon}}^* > 0$$

para todo $\underline{\sigma}$ EPA y, por tanto,

$$D^* = \int_{\Omega} \underline{\sigma}^* \underline{\dot{\epsilon}}^* \geq \int_{\Omega} \underline{\sigma} \underline{\dot{\epsilon}}^* \quad (6.20)$$

es decir

Teorema

La potencia disipada en un campo CPA es máxima.

Ahora bien, es posible definir un sistema E.A.

$$(\underline{x}^*, \underline{T}^{\nu*}, \underline{\sigma}^*)$$

y otro EPA.

$$(\underline{x}, \underline{T}^{\nu}, \underline{\sigma})$$

por lo que

$$(\underline{x}^* - \underline{x}, \underline{T}^{\nu*} - \underline{T}^{\nu}, \underline{\sigma}^* - \underline{\sigma})$$

es E.A. y al aplicar el TPV con $\underline{\dot{\epsilon}}^*$ se obtiene, en virtud de (6.20)

$$\int_{\Omega} (\underline{x}^* - \underline{x}) \underline{u}^* + \int_{\partial\Omega} (\underline{T}^{\nu*} - \underline{T}^{\nu}) \underline{u}^* \geq 0 \quad (6.21)$$

es decir

$$D^* = \int_{\Omega} \underline{\sigma}^* \underline{\dot{\epsilon}}^* \geq \int_{\Omega} \underline{x} \underline{u}^* + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^{\nu} \underline{u}^* = \underline{P} \underline{u}^* \quad (6.22)$$

La interpretación de

$$\underline{u}^* \underline{P} \leq D_m^* \quad (6.23)$$

conduce al teorema cinemático. En efecto

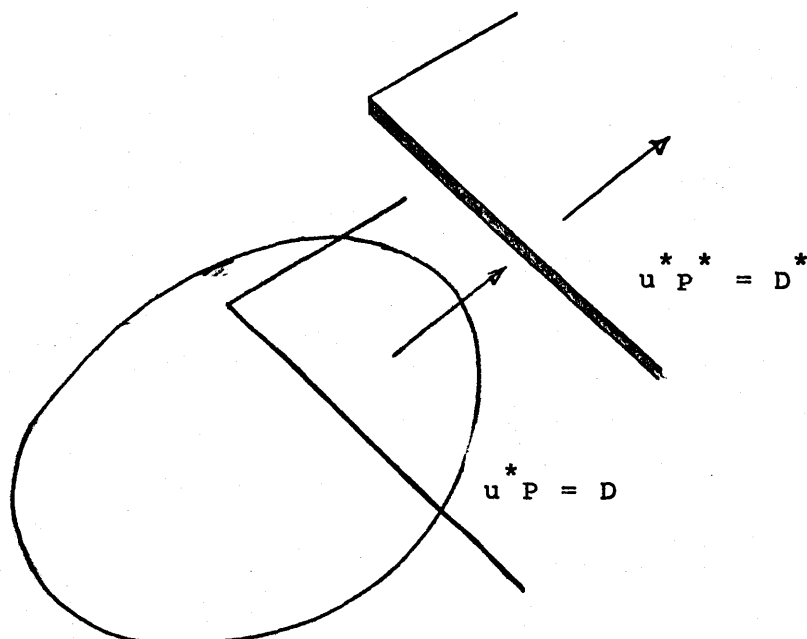


fig.- 6.8

puesto que u^* y D^* son números, la ecuación

$$u^* P = D$$

define un plano situado mas cerca del origen que $u^* P^* = D^*$. Puesto que todos los puntos de F^C corresponden a situaciones EPA siempre se cumple (6.23) que los citados planos son exteriores a la superficie de colapso. El caso limite corresponde evidentemente a la situación en que se han escogido campos σ^* , ε^* correspondientes a un determinado punto de la superficie de carga.

Así pues,

Teorema Cinemático

Si se conoce un campo de velocidades $CPA\dot{u}^*$, la igualdad

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}^* + \int_{\Omega} \underline{\underline{T}}^v \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}^* = D^*$$

define un plano que es totalmente exterior o tangente a la superficie de colapso.

Puesto que el punto representativo P está fuera de la superficie F_C decimos que representa una cota superior de la solución.

En general es cómodo disponer campos discontinuos como los indicados en 6.1. En el ejemplo de identificación (fig. 6.9)

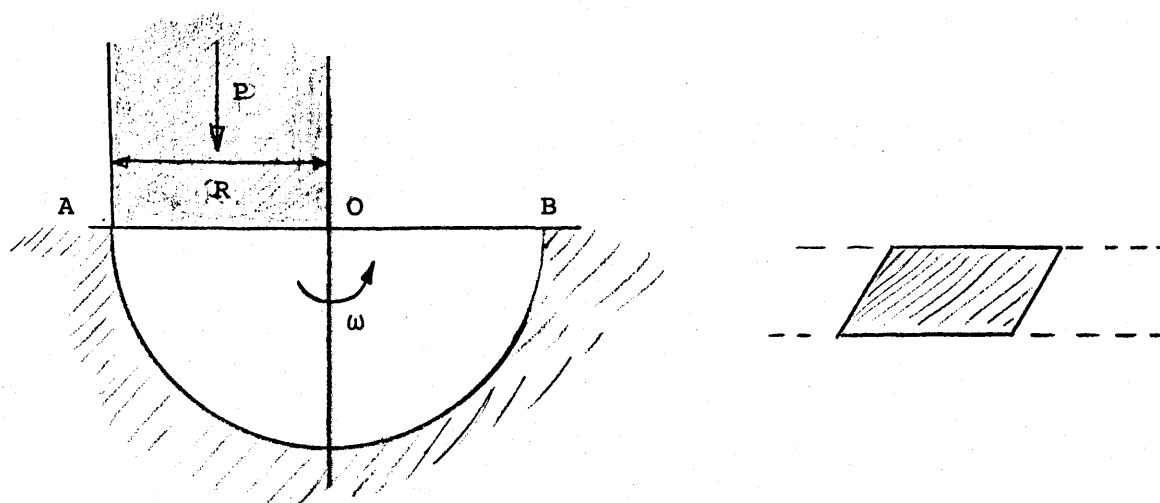


fig.- 6.9

se puede suponer un mecanismo como el indicado, donde AOB es la separación entre dos cuerpos rígidos.

La velocidad en el contorno es ωR y si se supone una tensión tangencial $\tau = k$ la potencia disipada es

$$D = k \pi R \omega R$$

mientras que la carga desciende $\omega R / 2$ y por tanto

$$D = P^{\max} \omega R / 2 = k \pi R \omega R$$

$$P_{\max} = 2k \pi R$$

$$\sigma_{\max} = P_{\max} / R = 2k\pi = 6,28 k \geq \sigma^C$$

Se observa así que con ámbos sencillos mecanismos se ha conseguido la acotación

$$4k \leq \sigma^C \leq 6,28k$$

Observese que ahora la carga de diseño sería "insegura" ya que el teorema indica que el colapso se produce antes. Por ello a veces se habla del "teorema inseguro" al referirse al teorema cinemático.

Aunque los ejemplos del corte anterior son muy utilizados es también sencillo obtener cotas mediante el uso de campos continuos. Un caso sencillo es el siguiente.

Sea una deformación uniforme que cumple la condición $\dot{\underline{\epsilon}} = 0$

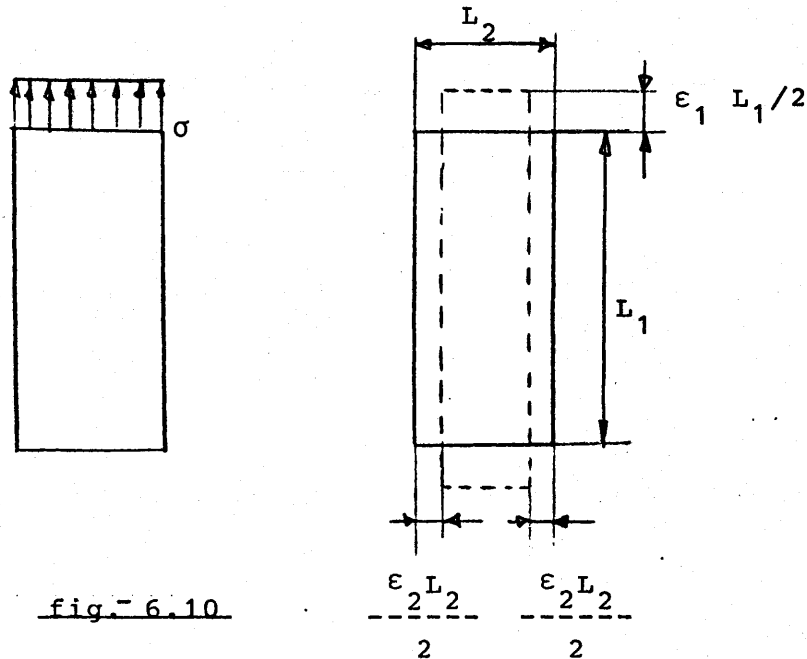


fig. 6.10

Las tensiones relacionadas con estas deformaciones corresponden al caso límite de Tresca.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$$

La disipación es

$$\begin{aligned} L_1 L_2 (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2) &= L_1 L_2 (\sigma_1 \dot{u}_1 / L_1 - \sigma_2 \dot{u}_2 / L_2) = \\ &= \dot{u}_1 / L_1 (\sigma_1 - \sigma_2) L_1 L_2 \end{aligned}$$

$$D = 2k \dot{u}_1 L_2$$

La carga máxima

$$\sigma_{\max} L_2 \dot{u}_1 = 2k \dot{u}_1 L_2$$

$$\sigma_{\max} = 2k$$

como era de esperar.

Observese igualmente que, si la carga se aplicase en horizontal.

$$\sigma_{\max} L_1 \dot{u}_2 = 2k \dot{u}_1 L_2$$

$$\sigma_{\max} \dot{u}_2 / L_2 = 2k \dot{u}_1 / L_1$$

$$\sigma_{\max} = 2k$$

6.5.-EL MATERIAL ELASTOPLASTICO PERFECTO

Los razonamientos anteriores se han realizado sobre un material rígido plástico. Puede demostrarse sin embargo el siguiente

Teorema

Al alcanzar la carga de colapso, si la deformación se realiza a carga constante solo se producen incrementos de deformación plástica.

En efecto, si el teorema de las potencias virtuales se aplica para incrementos de tensión

$$\int_{\Omega} \underline{\dot{\sigma}} \underline{\dot{\epsilon}} = 0 \quad (6.24)$$

en virtud de la constancia de las cargas.

Como

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^e + \underline{\dot{\epsilon}}^p \quad (6.25)$$

$$\int_{\Omega} \underline{\dot{\sigma}} \underline{\dot{\epsilon}}^e = - \int_{\Omega} \underline{\dot{\sigma}} \underline{\dot{\epsilon}}^p = 0 \quad (6.26)$$

pues se admite la convexidad de la superficie de plastificación. Puesto que $\underline{\dot{\sigma}} \neq 0$ y $\underline{\dot{\sigma}} \underline{\dot{\epsilon}}^e$ es positivo para materiales elásticos se sigue

$$\underline{\dot{\epsilon}}^e = 0 \quad \underline{\epsilon}^e = \text{cte.}$$

Durante el colapso a partir de la carga limite toda la deformación es plástica.

6.6.-EL MATERIAL DE COULOMB

Debe hacerse notar que los teoremas del

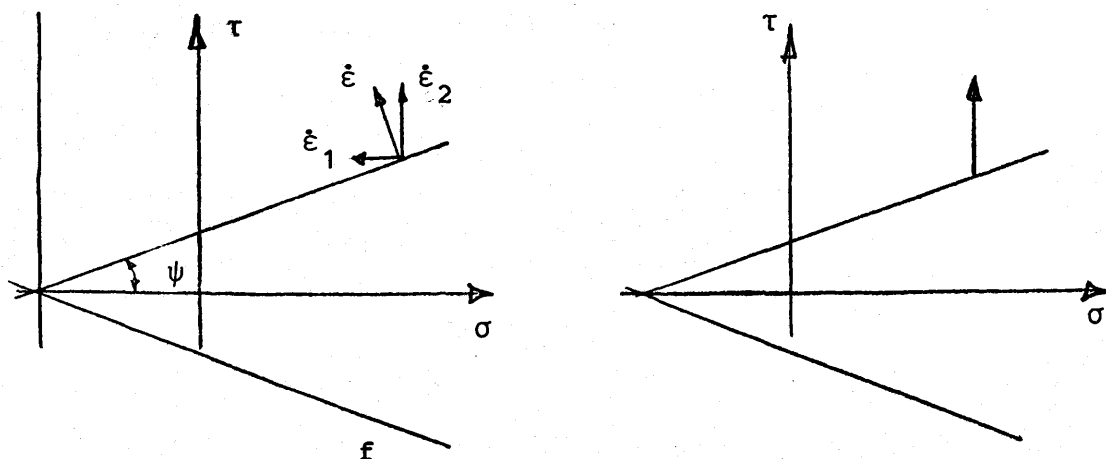


fig. 6.11

análisis límite son ciertos para las hipótesis

- a) superficie convexa.
- b) regla de la normalidad
- c) no rigidización.

En el caso de material que obedece a la ley de Coulomb.

$$f = \tau - C - \sigma \operatorname{tg} \Psi$$

la ley asociada implica

$$\begin{aligned} -\frac{1}{d\lambda} \dot{\epsilon}_1 &= -\frac{\partial f}{\partial \sigma} = -\operatorname{tg} \Psi \\ -\frac{1}{d\lambda} \dot{\epsilon}_2 &= -\frac{\partial f}{\partial \tau} = +1 \end{aligned} \quad \frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_2} = -\operatorname{tg} \Psi \quad (6.27)$$

con

$$\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = (1 - \operatorname{tg} \Psi) d$$

es decir, dilatación positiva.

La disipación por unidad de volumen es

$$\sigma \dot{\epsilon}_1 + \tau \dot{\epsilon}_2 = (-\sigma \operatorname{tg} \Psi + \tau) \dot{\epsilon}_2 = C \dot{\epsilon}_2 \quad (6.28)$$

Es importante hacer notar el aumento de volumen (σ se ha dibujado positivo a compresiones) que se produce siempre a menos que se considere una ley no asociada o el material sea puramente cohesivo ($\Psi = 0$).

Ello es de la mayor transcendencia al aplicar campos discontinuos cinemáticamente admisibles pues, en este caso, deben presentarse las dos componentes de la velocidad: tangencial a la línea supuesta \dot{u}_t (fig 6.12) y normal, de tal forma que

$$\dot{u}_n / \dot{u}_t = - \operatorname{tg} \Psi$$

Es decir, si se pretende hacer deslizar mediante mecanismos de rotación un bloque sobre otro debe cumplirse la condición anterior.

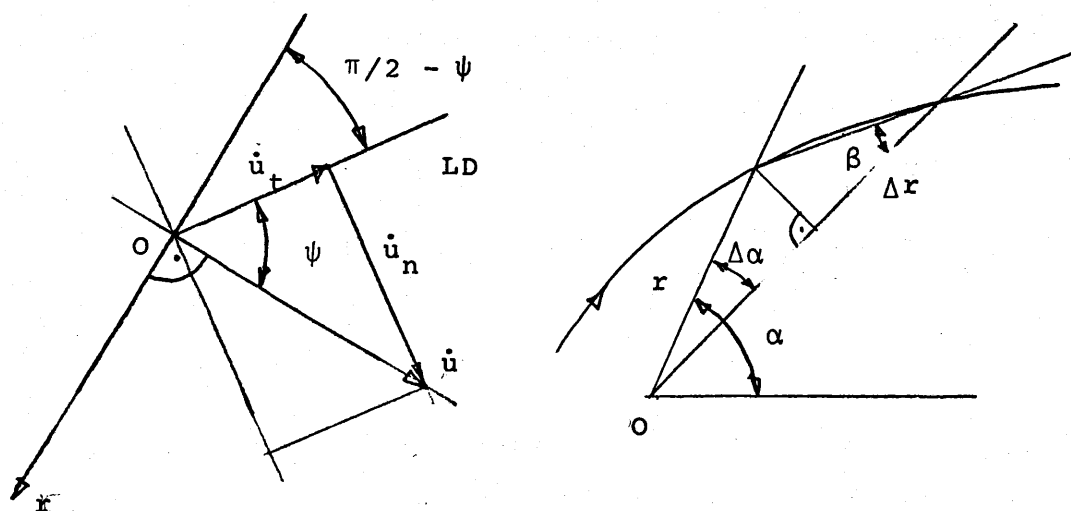


fig. 6.12

Puesto que (fig. 6.12a) la velocidad total \dot{u} es normal al radio desde el centro instantáneo de rotación el ángulo que forma la línea de deslizamiento con aquél es $(\pi/2 - \Psi)$. En fig. (6.12b) es posible escribir

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{r \Delta \alpha}{\Delta r}$$

y en el límite

$$\operatorname{tg} (\pi/2 - \Psi) = -\frac{r \, d\alpha}{dr}$$

es decir

$$-\frac{dr}{r} = \operatorname{tg} \Psi \, d\alpha$$

que integrada conduce a

$$r = r_0 e^{\alpha \operatorname{tg} \Psi}$$

donde r_0 es la magnitud de un radio vector arbitrario y α el ángu

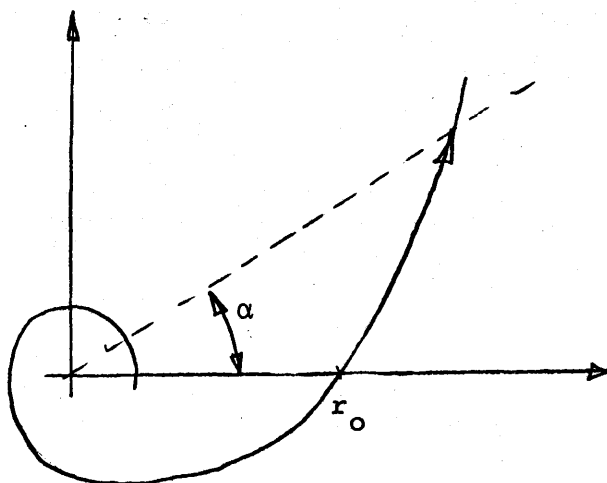


fig.-6.13

lo que forma el radio vector con él.

La curva citada es llamada espiral logarítmica y es el tipo de discontinuidad adecuado para el material de Coulomb.

La línea recta es igualmente posible cuando se trata de un mecanismo de traslación.

Ejemplos clásicos de aplicación son los estudios de altura máxima de un desnivel en el terreno.

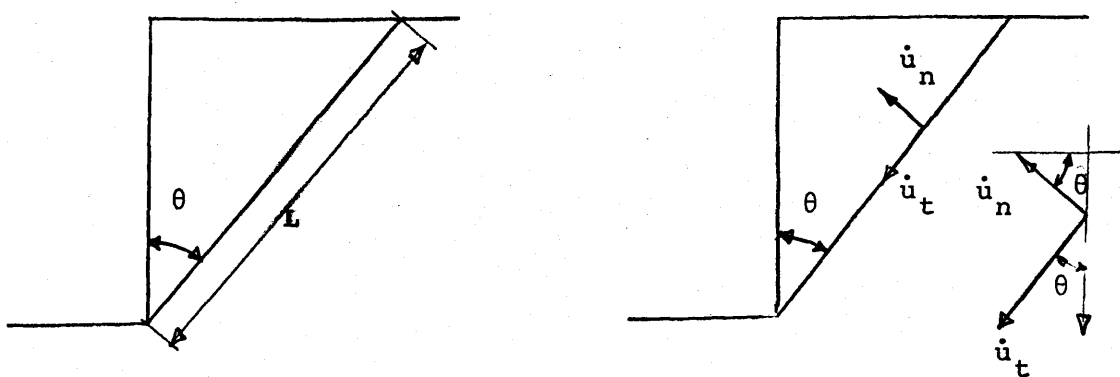


fig.- 6.14

Admitamos primero una rotura plana. Según lo indicado anteriormente

$$\frac{\dot{u}_n}{\dot{u}_t} = \frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_2} = - \operatorname{tg} \psi$$

de modo que si se acepta una tensión de compresión la "velocidad" normal tiene el sentido indicado en la fig. (6.14b).

La potencia disipada es

$$C (\dot{\epsilon}_2 t) L = C \dot{u}_t H / \cos \theta \quad (6.29)$$

donde t es el espesor de la supuesta capa de discontinuidad. El peso impone una potencia

$$\begin{aligned} \gamma/2 H^2 \operatorname{tg} \theta (\dot{u}_t \cos \theta - \dot{u}_n \operatorname{sen} \theta) &= \\ = \gamma H^2/2 \operatorname{tg} \theta (\cos \theta - \operatorname{tg} \psi \operatorname{sen} \theta) \dot{u}_t & \quad (6.30) \end{aligned}$$

De modo que, igualando (6.29) y (6.30) se obtiene

$$H = \frac{2C}{\gamma} \frac{\cos \Psi}{\sin \theta \cos(\theta + \Psi)} \quad (6.31)$$

De acuerdo con la filosofía anterior (6.31) define una variedad lineal, dependiente de θ , que se encuentra en el exterior de la superficie de colapso. El valor mas próximo a la realidad se obtiene minimizando (6.31)

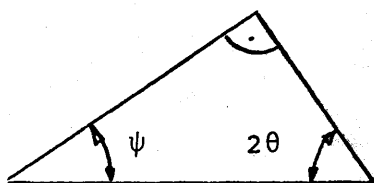


fig. 6.15

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad -\sin \theta \sin(\theta + \Psi) + \cos(\theta + \Psi) \cos \theta = 0$$

$$\operatorname{tg}(\theta + \Psi) = 1/\operatorname{tg} \theta$$

$$2\theta + \Psi = \pi/2$$

$$\{\theta = \pi/4 - \Psi/2\}$$

que es la solución buscada, con

$$\begin{aligned} H &= \frac{2C}{\gamma} \frac{\cos \Psi}{\sin(-\frac{\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}) \cos(-\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2})} = \\ &= \frac{4C}{\gamma} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}) \cos(-\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2})} = \\ H &= \frac{4C}{\gamma} \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2}) \quad (6.32) \end{aligned}$$

Según se desprende de lo indicado en páginas anteriores es posible analizar mecanismos de rotación si se utiliza como curva de deslizamiento la espiral logarítmica.

Si llamamos Ω a la velocidad de rotación un punto a la distancia r presenta una velocidad tangencial

$$\dot{u}_t = \Omega r \cos \Psi \quad (6.33)$$

y por tanto la disipación por unidad de longitud es

$$c \Omega r \cos \Psi ds \quad (6.34)$$

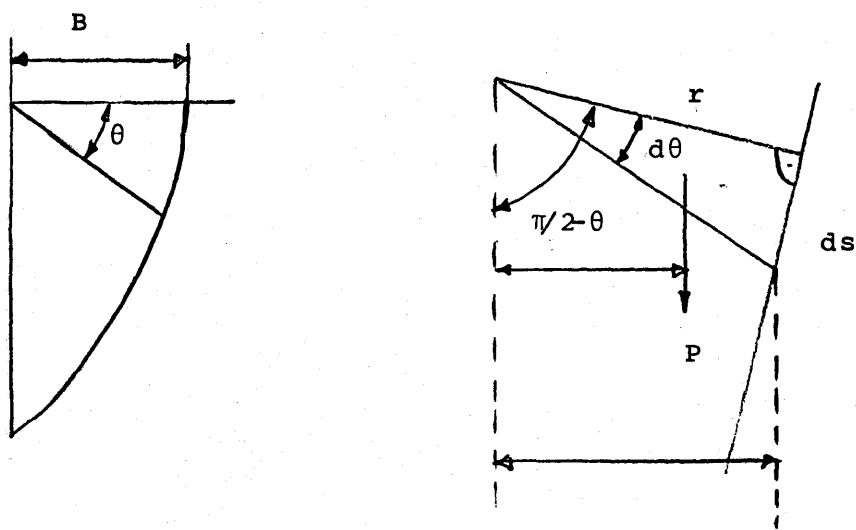


fig.- 6.16

Pero

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = (1 + \operatorname{tg}^2 \Psi) r d\theta = -\frac{r}{\cos \Psi} d\theta$$

y por ello (6.34) se transforma en

$$c \Omega r^2 d\theta \quad (6.35)$$

En el caso concreto de la figura

$$D = \int_0^{\pi/2} c \Omega r_o^2 e^{2\operatorname{tg} \Psi \theta} d\theta = \frac{c \Omega r_o^2}{2\operatorname{tg} \Psi} \{e^{2\operatorname{tg} \Psi \pi/2} - 1\} = -\frac{c \Omega}{2\operatorname{tg} \Psi} (H^2 - B^2)$$

El peso de una cuña elemental es

$$1/2 \gamma ds \cos \Psi r = 1/2 \gamma r^2 d\theta$$

de modo que la potencia de peso

$$P_1 = \gamma / 3 \Omega \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \theta d\theta = \frac{\gamma r_o^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta e^{\mu \theta} d\theta \quad (6.36)$$

$$\mu = 3 \operatorname{tg} \Psi$$

que conduce a

$$P_1 = \Omega \frac{\gamma r_o^3}{3} e^{\mu \theta} \frac{\operatorname{sen} \theta + \frac{\mu \cos \theta}{1 + \mu^2}} \bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \Omega \frac{\gamma r_o^3}{3} \frac{e^{3\pi/2 \operatorname{tg} \Psi} - 3 \operatorname{tg} \Psi}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \Psi}$$

$$P_1 = \Omega \frac{\gamma}{3} \frac{H^3 - 3 \operatorname{tg} \Psi B^3}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \Psi}$$

Igualando se obtiene

$$\frac{C r_o^2}{2 \operatorname{tg} \Psi} (e^{\pi \operatorname{tg} \Psi} - 1) = \frac{\gamma r_o^3}{3} \frac{e^{3\pi/2 \operatorname{tg} \Psi} - 3 \operatorname{tg} \Psi}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \Psi}$$

$$H = r_o e^{\pi/2 \operatorname{tg} \Psi} = 3/2 \frac{e^{\pi \operatorname{tg} \Psi} - 1}{\operatorname{tg} \Psi} C / \gamma \frac{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \Psi}{(e^{\pi \operatorname{tg} \Psi} - 3 \operatorname{tg} \Psi)}$$

Para el caso de suelo puramente cohesivo, la espiral se transforma en un círculo

$$\Psi = 0, \quad r_o = r = H$$

$$\frac{e^{\pi \operatorname{tg} \Psi} - 1}{\operatorname{tg} \Psi} = \pi$$

$$H_{\text{cir}} = -\frac{3\pi}{2} - \frac{C}{\gamma} \quad 4,71 - \frac{C}{\gamma}$$

mientras que la altura limite en el caso plano sería

$$H_{\text{plana}} = -\frac{4C}{\gamma}$$

es decir una cota mejor.

Observese, no obstante, que hemos utilizado una espiral muy particular. En general sería posible expresar una familia de espirales en función, por ejemplo, de las coordenadas del centro de rotación, con lo que existen los grados de libertad $(x_{\text{ciR}}, y_{\text{ciR}})$ e imponiendo las condiciones

$$-\frac{f}{x_{\text{ci}}} = -\frac{f}{y_{\text{ci}}} = 0 \quad \text{sería posible obtener mejores resultados}$$

(CHEN 1975)

Puede utilizarse también el teorema estático para obtener una cota por defecto

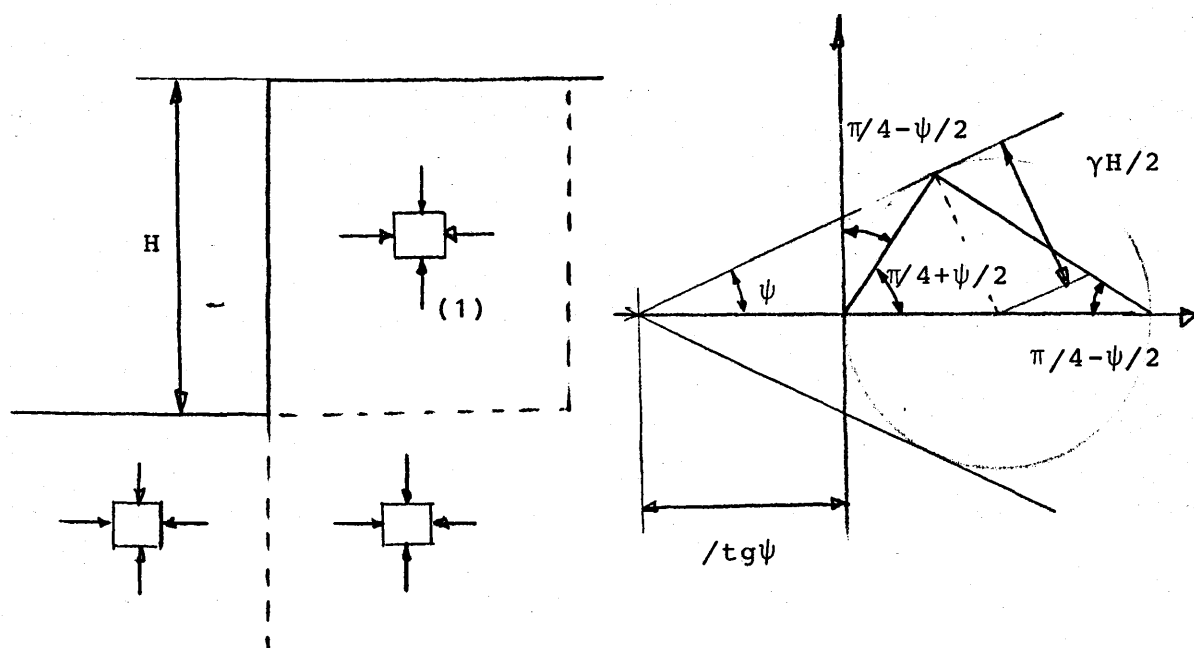


fig.- 6.17

El campo límite (1) de la figura (6.17) se consigue para

$$-\frac{\gamma_H}{2} = \left(-\frac{C}{\operatorname{tg} \Psi} + -\frac{\gamma_H}{2}\right) \operatorname{sen} \Psi = C \cos \Psi + -\frac{\gamma_H}{2} \operatorname{sen} \Psi$$

$$-\frac{\gamma_H}{2} (1 - \operatorname{sen} \Psi) = C \cos \Psi ;$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{2C}{\gamma} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}^2 \Psi}{(1 - \operatorname{sen} \Psi)^2}} = \\ &= -\frac{2C}{\gamma} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} \Psi}}{1 - \operatorname{sen} \Psi} = -\frac{2C}{\gamma} \frac{1}{\operatorname{tg} (\pi/4 + \Psi/2)} \end{aligned}$$

que para el caso $\Psi = 0$ conduce a

$$H = -\frac{2C}{\gamma}$$

con lo que

$$-\frac{2C}{\gamma} < H < -\frac{4C}{\gamma}$$

REFERENCIAS

- 1.- ALARCON,E.- "Elasticidad Racional". E.T.S.I.I. Sevilla (1977)
- 2.- ALARCON,E.- "Nociones de Reologia". Edix (1972)
- 3.- ALDER,J.F. & PHILLIPS,K.A.- "The Effect of Strain Rate and Temperature on the Resistance of Aluminium,Copper and Steel to Compression".(1954)
- 4.- BOLEY,B.A. & WIENER,J.H.- "Theory of Thermal Stresses". Wiley (1960)
- 5.- BUDIANSKY,B. et al- "Experimental Studies of Polyaxial Stress-Strain Laws of Plasticity". Proc. 1st Congress of Appl.-Mech. Illinois, Inst. of Tech. (1951)
- 6.- BRIDGMAN,P.W.- "The Effect of Hydrostatic Pressure on the Fracture of Brittle Substances". J. of Appl. Phys.,18 (1947)
- 7.- BRIDGMAN,P.W.- "Studies in Large Plastic Flow and Fracture with Special Emphasys on the Effect of Hydrotatic Pressure". Mc Graw Hill (1952)
- 8.- CALCOTE,L.R.- "Introduction to Continuum Mechanics". Van Nosstrand Company Inc. (1968)
- 9.- CALLADINE,C.R.- "Engineering Plasticity". Pergamon Press (1969)
- 10.- CAÑIZO,L.del.- "Plastificación Progresiva de un Talud Coloum-biano". Tesis Doctoral E.T.S.I.C.C.P. Madrid (1971)
- 11.- CHEN,W.F.- "Limit Analysis and Soil Plasticity". Elsevier (1975)
- 12.- DRUCKER,D.C.- "Stress-Strain Relations in the Plastic Range, a Survey of Theory and Experiment". Office of Naval Research.Contract N7,NR-041-032 (1950)
- 13.- FUNG,Y.C.- "Foundations of Solid Mechanics". Prentice Hall (1965)
- 14.- GEIRINGER,H.- "Fondements Mathématiques de la Théorie des Corp Plastiques Isotropes". Mem. Sc. Math. N°86 (1937)

- 15.- HENCKY, H.- "Zur Theorie Plastischer Deformationen und der hierdurch in Material Hervorgerufenen Nachspannungen". Z. Angew Math. Mech. 4 (1924)
- 16.- HILL, R.- "The Mathematical Theory of Plasticity". Oxford Clarendon Press (1950)
- 17.- HOFFMAN, O, & SACHS, G.- "Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers". Mc Graw Hill (1953)
- 18.- HOHENEMSER, R.- "Flerversuche an Röhren aus Stahl bei kombinierter Zug- und Torsionsbeanspruchung". Z. Angew Math. Mech. 11 (1931)
- 19.- JOHNSON, W. & MELLOR, P.- "Plasticity for Mechanical Engineers" Van Nostrand (1962)
- 20.- KOITER, W.T.- "Biezeno Anniversary Volume Stam". Haarlem (1953)
- 21.- LODE, W.- "Versuche über den Einfluss der Mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel". Zeitsch, Phys. 36 (1926)
- 22.- MELAN, E.- "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums". Infr-Arch 9 (1938)
- 23.- MENDELSON, A.- "Plasticity: Theory and Applications". Mc Millan Press (1968)
- 24.- MISES, R. Von- "Göttinfern Nachrichten". Math. Phys. Kl. (1913)
- 25.- MISES, R. Von- "Mechanik der Plastischen Formänderung von Kristallen". Z. Angew Math. Mech. 8 (1928)
- 26.- MROZ, Z.- "Mathematical Models of Inelastic Material Behavior". University of Waterloo (1973)
- 27.- MROZ, Z. & ZIENKIEWICZ, O.C. & NORRIS, V.A.- "An Anisotropic Hardening Model for Soils and its Application to Cyclic Loading". Int. J. Num. and Anal. Meth. in Geomech. vol 2 (1978)
- 28.- NADAI, A.- "Plasticity". Mc Graw Hill (1931)

- 29.- NADAI, A.- "Plastic Behavior of Metals in the Strain-Hardening-Range". J. Appl. Phys. 8 (1937)
- 30.- NOWACKI, W.- "Thermoelasticity". Pergamon Press (1965)
- 31.- ODQUIST, F.K.G.- "Vie Verfestigung von Flussienühulichen Körpern". Z. Angew Math. Mech. 13 (1933)
- 32.- PRAGUER, W.- "The Theory of Plasticity: a Survey of Recent Achievements". Proc. Int. Mech. Engn. 163 (1955)
- 33.- PRAGUER, W. & HODGE, P.G.- "The Theory of Perfectly Plastic Solids". Wiley (1951)
- 34.- PREVOST, J.H.- "Anisotropic Undrained Stress-Strain Behavior of Clays". A.S.C.E. J. Geotech. Eng. Div. 8 (1978)
- 35.- PREVOST, J.H.- "Mathematical Modelling of Monotonic and Cyclic-Undrained Clay Behavior". Int. J. Num. and Anal. Meth. in Geomech. vol 1 (1977)
- 36.- REUSS, A.- . Z. Angew Math. Mech. 10 (1930)
- 37.- SHIELD, R.T. & DRUCKER, D.C.- "The Application of Limit Analysis to Punch Indentation Problems". Trans. A.S.M.E. J. Appl. Mech. 20 (1953)
- 38.- SLATER, R.C.A.- "Engineering Plasticity. Theory and Application to Metal Forming Processes". Mc Millan Press Ltd. (1967)
- 39.- SOKOLNIKOFF, I.S.- "Mathematical Theory of Elasticity". Mc Graw Hill (1956)
- 40.- TAYLOR, G.I. & QUINNEY, H.- "The Plastic Distorsion of Metals". Phil. Trans. R. Soc. 230 (1931)
- 41.- TRUESDELL, C. (edit)- "Encyclopedia of Physics. Vol VIa/1". - Springer Verlag (1973)